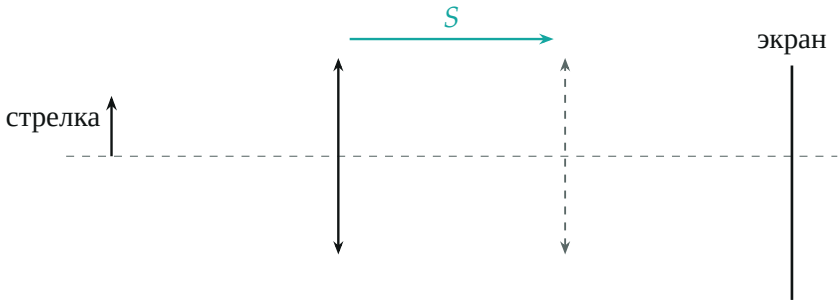
Линза: два положения при неподвижном экране

Задача 5. [Физтех 2015/16, 11 класс, задача 5] Тонкая собирающая линза создаёт на экране изображение стрелки, перпендикулярной её главной оптической оси, с увеличением $\Gamma = 2$. Линзу перемещают, положение главной оптической оси остаётся неизменным, стрелку и экран не двигают. К моменту, когда на экране вновь наблюдается чёткое изображение, перемещение составило $S = 27$ см.

1. Сравнить расстояние между стрелкой и линзой до перемещения линзы и расстояние между экраном и линзой после перемещения.
2. Найти фокусное расстояние F линзы.



Поясняющий рисунок. Стрелка и экран неподвижны; линзу переносят из первого положения во второе (серое) на расстояние S.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Стрелка и экран стоят на месте, значит, сумма расстояний «стрелка — линза» и «линза — экран» одна и та же в обоих положениях линзы. Формула тонкой линзы симметрична относительно перестановки $d \leftrightarrow f$: если пара (d, f) даёт чёткое изображение, то и пара (f, d) даёт. Поэтому второе положение — зеркальное первому: линза стоит там, где расстояния до стрелки и до экрана поменялись местами. Задача на формулу тонкой линзы и увеличение.

Обозначения. d_1, f_1 — расстояния от линзы до стрелки и до экрана в первом положении, d_2, f_2 — во втором; $L = d + f$ — расстояние от стрелки до экрана (одно и то же); $\Gamma = f_1/d_1 = 2$ — увеличение в первом положении.

Пункт 1.

1. Два решения формулы линзы. Формула тонкой собирающей линзы для действительного изображения на экране:

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}, \qquad d+f=L.$$

При заданных F и L это система двух уравнений; подставив $f=L-d$, получаем квадратное уравнение $d^2-Ld+FL=0$. У него два корня, и их сумма по теореме Виета равна L:

$$d_1+d_2=L=d_1+f_1 \quad \Rightarrow \quad d_2=f_1, \qquad f_2=L-d_2=d_1.$$

Значит, расстояние от экрана до линзы после перемещения f_2 равно расстоянию от стрелки до линзы до перемещения d_1: *расстояния равны*. Графически это две точки пересечения гиперболы $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$ с прямой $d+f=L$, симметричные относительно биссектрисы $f=d$ (рис. 4).

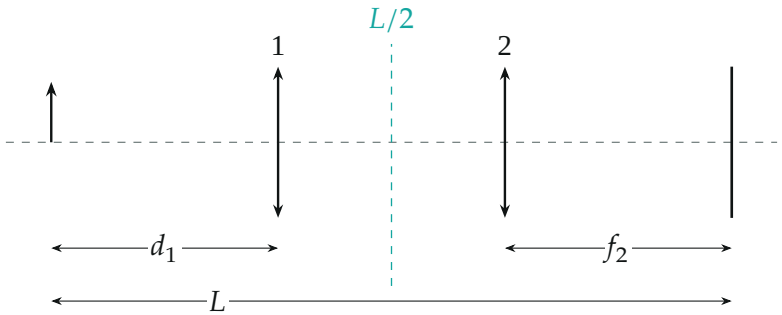


Рис. 1. Два положения линзы симметричны относительно середины отрезка «стрелка — экран»: $f_2=d_1$.

Пункт 2.

2. Первое положение. Увеличение $\Gamma=\frac{f_1}{d_1}=2$, поэтому $f_1=2d_1$ (рис. 2).

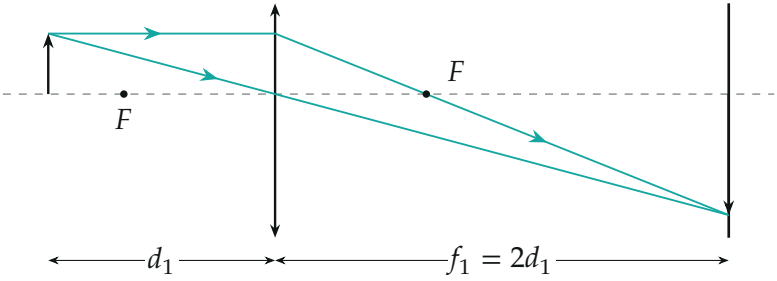


Рис. 2. Первое положение линзы: изображение на экране перевёрнутое и увеличенное вдвое. Лучи построены по вычисленным точкам ($d_1 = 27$ см, $f_1 = 54$ см, $F = 18$ см).

3. Второе положение и перемещение. По пункту 1 во втором положении $d_2 = f_1 = 2d_1$, $f_2 = d_1$ (рис. 3). Линза отъехала от стрелки с расстояния d_1 на расстояние $2d_1$:

$$S = d_2 - d_1 = 2d_1 - d_1 = d_1 \quad \Rightarrow \quad d_1 = S = 27\,\text{см}, \qquad f_1 = 2S = 54\,\text{см}.$$

В общем виде $S = f_1 - d_1 = (\Gamma - 1)d_1$.

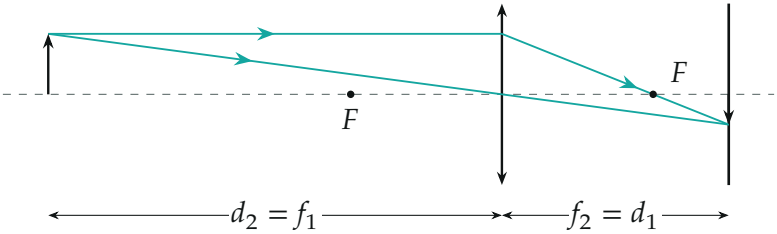


Рис. 3. Второе положение: расстояния поменялись местами, изображение уменьшенное вдвое ($\Gamma_2 = f_2/d_2 = 1/2$).

4. Фокусное расстояние. Формула линзы для первого положения:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{2d_1} = \frac{3}{2d_1} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{2}{3}d_1 = \frac{2}{3}S = 18\ \text{см}.$$

В общем виде $F = \dfrac{d_1 f_1}{d_1 + f_1} = \dfrac{\Gamma}{\Gamma + 1}d_1 = \dfrac{\Gamma S}{\Gamma^2 - 1}$.

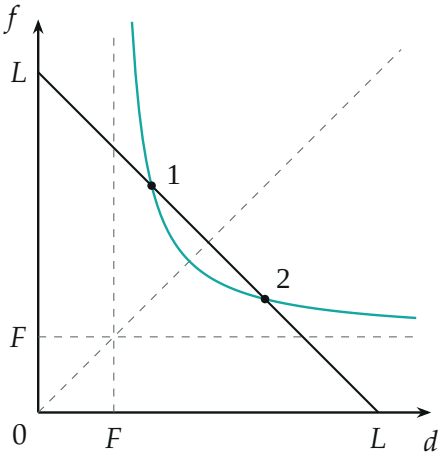


Рис. 4. Все положения линзы, дающие чёткое изображение: гипербола формулы линзы (бирюзовая) и прямая $d + f = L$. Две точки пересечения 1 и 2 симметричны относительно пунктира $f = d$: $d_2 = f_1, f_2 = d_1$.

Обратите внимание. Перемещение линзы S — не расстояние между изображениями и не $f_1 - f_2$ в общем случае; здесь $S = d_2 - d_1 = f_1 - d_1$, и только благодаря симметрии пункта 1 оно выражается через одно d_1. Второе положение всегда даёт обратное увеличение $1/\Gamma$.

Ответ.

$$f_2 = d_1 \text{ (расстояния равны)}; \qquad F = \frac{\Gamma}{\Gamma^2 - 1} S = \frac{2}{3} S = 18 \text{ см}$$

Проверка. Размерность: F — длина. Второе положение: $\frac{1}{54} + \frac{1}{27} = \frac{3}{54} = \frac{1}{18}$ см$^{-1}$ — изображение чёткое при том же F. Предельный случай: при $\Gamma \to 1$ ($d = f = 2F$) оба положения сливаются, $S \to 0$, и формула $S = (\Gamma^2 - 1)F/\Gamma$ это даёт. Второй способ через корни квадратного уравнения: $d^2 - 81d + 18 \cdot 81 = 0$, $d = \frac{81 \pm \sqrt{81^2 - 4 \cdot 1458}}{2} = \frac{81 \pm 27}{2}$, то есть 27 и 54 см, разность корней 27 см$= S$.

Смысл: при неподвижных предмете и экране у линзы ровно два «чётких» положения, зеркальных друг другу; расстояние между ними вме-

сте с увеличением однозначно задаёт фокус (на этом основан метод Бесселя измерения фокусного расстояния).

Ответ. 1) расстояния равны; 2) $F = \frac{2}{3}S = 18$ см.