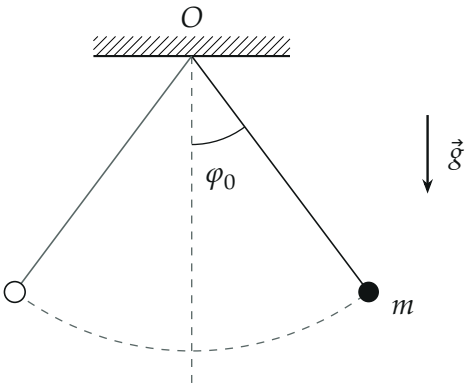
Силы натяжения нити маятника

Задача 1. [Физтех 2015/16, 11 класс, задача 1] Маленький шарик массой m подвешен на нити и колеблется в вертикальной плоскости с угловой амплитудой $\varphi_0 = \arccos 0{,}8$.

1. Найти минимальную силу натяжения нити при колебаниях.
2. Найти максимальную силу натяжения нити при колебаниях.
3. Найти касательное ускорение шарика в момент, когда сила натяжения нити в 1,5 раза больше её минимального значения.



Поясняющий рисунок: шарик на нити длиной l отклоняется от вертикали на угол не больше φ_0; $\cos\varphi_0 = 0{,}8$, $\varphi_0 \approx 36{,}9°$.

▲ **Решение. Что происходит.** Шарик движется по дуге окружности радиуса l (длина нити), и его скорость меняется. Удобно разложить ускорение на две части. Нормальное (центростремительное) v^2/l направлено к точке подвеса: его создают натяжение нити и составляющая силы тяжести вдоль нити — отсюда находится натяжение. Касательное ускорение направлено по касательной к дуге: его создаёт только составляющая силы тяжести поперёк нити (натяжение перпендикулярно скорости). Скорость в каждой точке даёт закон сохранения механической энергии. Задача на движение по окружности с переменной скоростью: второй закон Ньютона в проекциях на нормаль и касательную плюс закон сохранения энергии.

Обозначения. l — длина нити, O — точка подвеса, φ — угол отклонения нити от вертикали в данный момент, v — скорость шарика, T — сила натяжения нити, a_τ — касательное ускорение. Ось n — вдоль нити к точке подвеса, ось τ — по касательной к дуге (рис. 1). Нить нерастяжима и невесома, сопротивления воздуха нет.

1. Скорость при угле φ. Работу совершает только сила тяжести (натяжение перпендикулярно скорости). Закон сохранения механической энергии шарика между крайним положением ($\varphi = \varphi_0$, $v = 0$) и положением с углом φ: высота шарика над нижней точкой равна $l(1 - \cos\varphi)$, поэтому

$$mgl(1 - \cos\varphi_0) = \frac{mv^2}{2} + mgl(1 - \cos\varphi),$$

откуда

$$mv^2 = 2mgl(\cos\varphi - \cos\varphi_0).$$

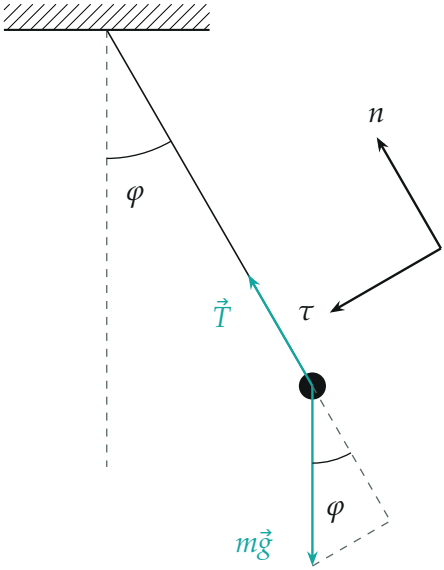


Рис. 1. Силы при угле φ: натяжение $\vec{T}$ — вдоль нити, сила тяжести $m\vec{g}$ раскладывается на $mg\cos\varphi$ вдоль нити (от подвеса) и $mg\sin\varphi$ по касательной (к положению равновесия). Ось n — к подвесу, ось τ — к положению равновесия.

2. Натяжение при угле φ. Второй закон Ньютона для шарика в проекции на ось n (к точке подвеса). Ускорение на эту ось — центростремительное v^2/l; натяжение проецируется с плюсом, сила тяжести — с минусом, $-mg\cos\varphi$ (рис. 1):

$$\frac{mv^2}{l} = T - mg\cos\varphi,$$

$$T = mg\cos\varphi + \frac{mv^2}{l} = mg\,(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0).$$

Натяжение тем больше, чем больше $\cos\varphi$, то есть чем меньше угол отклонения (рис. 2).

Пункт 1.

3. Минимальное натяжение — при наибольшем угле, в крайнем положении $\varphi = \varphi_0$, где шарик на мгновение останавливается:

$$T_{\min} = mg\,(3\cos\varphi_0 - 2\cos\varphi_0) = mg\cos\varphi_0 = 0{,}8\,mg.$$

Скорость здесь ноль, центростремительного ускорения нет: натяжение просто уравновешивает составляющую силы тяжести вдоль нити.

Пункт 2.

4. Максимальное натяжение — в нижней точке, $\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$:

$$T_{\max} = mg\,(3 - 2\cos\varphi_0) = mg\,(3 - 1{,}6) = 1{,}4\,mg.$$

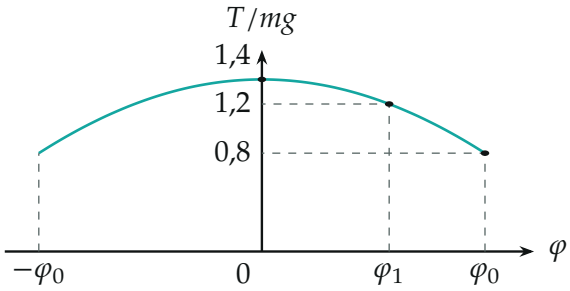


Рис. 2. Натяжение нити в зависимости от угла отклонения, T =

$mg(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0)$ (по точкам): $0{,}8\,mg$ в крайних положениях, $1{,}4\,mg$ в нижней точке, $1{,}2\,mg$ при $\varphi_1 \approx 21°$.

Пункт 3.

5. Угол, при котором $T = 1{,}5\,T_{\min}$. Искомое натяжение $T_1 = 1{,}5 \cdot 0{,}8\,mg = 1{,}2\,mg$ (оно между $T_{\min}$ и $T_{\max}$, значит, такое положение есть). Из формулы шага 2:

$$3\cos\varphi_1 - 2\cos\varphi_0 = 1{,}2 \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi_1 = \frac{1{,}2 + 1{,}6}{3} = \frac{14}{15},$$

$$\sin\varphi_1 = \sqrt{1 - \frac{196}{225}} = \frac{\sqrt{29}}{15}.$$

6. Касательное ускорение. Второй закон Ньютона в проекции на касательную τ: натяжение перпендикулярно ей и не входит, сила тяжести даёт $mg\sin\varphi$ (рис. 1):

$$ma_\tau = mg\sin\varphi_1 \quad \Rightarrow \quad a_\tau = g\sin\varphi_1 = \frac{\sqrt{29}}{15}\,g \approx 0{,}36\,g.$$

Направлено касательное ускорение к положению равновесия: на пути вниз шарик разгоняется, на пути вверх — тормозится. Полное ускорение складывается из касательного и нормального (рис. 3): $a_n = v^2/l = 2g(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_0) = \frac{4}{15}\,g \approx 0{,}27\,g$.

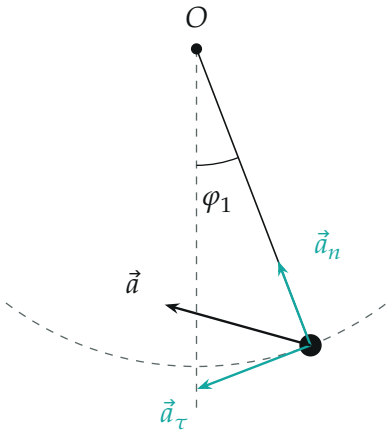


Рис. 3. Ускорение шарика при φ_1: касательное $a_\tau = \frac{\sqrt{29}}{15}g$ (к положению равновесия) и нормальное $a_n = \frac{4}{15}g$ (к подвесу); стрелки в масштабе.

Обратите внимание. Минимальное натяжение не равно нулю и не равно mg: в крайней точке нить держит только составляющую $mg\cos\varphi_0$.

Ответ.

$$T_{\min} = mg\cos\varphi_0 = 0{,}8\,mg, \qquad T_{\max} = mg(3-2\cos\varphi_0) = 1{,}4\,mg,$$
$$a_\tau = g\sin\varphi_1 = \frac{\sqrt{29}}{15}\,g$$

Проверка. Размерности: T — в единицах mg (сила), a_τ — в единицах g. Предельный случай: при $\varphi_0 \to 0$ (шарик почти висит) $T_{\min}$ и $T_{\max}$ стремятся к mg, как у покоящегося шарика. Численно (python): $\cos\varphi_1 = 0{,}9333$, $\varphi_1 = 21{,}04^\circ$, $a_\tau = 0{,}359\,g$; подстановка в $T = mg(3\cos\varphi_1 - 1{,}6)$ даёт $1{,}200\,mg$.

Смысл: натяжение «чувствует» и вес, и скорость — больше всего оно внизу, где шарик быстрее всего; касательное же ускорение задаёт только наклон нити.

Ответ. 1) $T_{\min} = 0{,}8\,mg$; 2) $T_{\max} = 1{,}4\,mg$; 3) $a_\tau = \frac{\sqrt{29}}{15}\,g \approx 0{,}36\,g$.