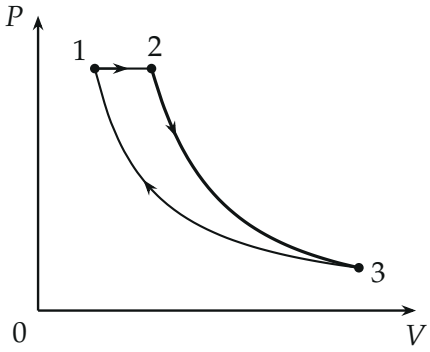
Цикл: изобара, адиабата, изотерма

Задача 2. [Физтех 2015/16, 11 класс, задача 2] Газообразный гелий совершает цикл, состоящий из изобарического расширения 1-2, адиабатического процесса 2-3 и изотермического сжатия 3-1 (см. рис.). Отношение работы газа в изобарическом процессе к работе над газом при его сжатии равно α.

1. Найти отношение работы газа в процессе 2-3 к работе над газом при его сжатии.
2. Найти КПД цикла.



▲ **Решение. Что происходит.** Три процесса цикла связаны через внутреннюю энергию. Точки 1 и 3 лежат на одной изотерме, поэтому внутренняя энергия гелия в них одинакова: всё, что газ «набрал» на изобаре 1-2, он отдаёт работой на адиабате 2-3. А на изобаре одноатомного газа работа и приращение внутренней энергии связаны простым множителем $3/2$. Тепло газ получает только на изобаре: на адиабате теплообмена нет, на изотермическом сжатии газ тепло отдаёт. Задача на первый закон термодинамики для каждого процесса цикла и КПД цикла.

Обозначения. ν — количество гелия, T_1, T_2, T_3 — температуры в точках цикла, U_1, U_2, U_3 — внутренняя энергия. A_{12}, A_{23} — работа газа в процессах 1-2 и 2-3 (положительна при расширении), $A'_{31} > 0$ — работа над газом при изотермическом сжатии 3-1 (работа газа там равна $-A'_{31}$). По условию $A_{12} = \alpha A'_{31}$. Гелий — одноатомный идеальный газ: $U = \frac{3}{2}\nu RT$.

1. Изобара 1-2. Работа газа при постоянном давлении P_1 — площадь под отрезком 1-2 (рис. 1): $A_{12} = P_1(V_2 - V_1) = \nu R(T_2 - T_1)$ (уравнение Менделеева–Клапейрона в точках 1 и 2). Приращение внутренней энергии

$$U_2 - U_1 = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}A_{12}.$$

Первый закон термодинамики для процесса 1-2 даёт подведённое тепло:

$$Q_{12} = (U_2 - U_1) + A_{12} = \frac{5}{2}A_{12}.$$

Газ нагревается ($T_2 > T_1$ при расширении на изобаре), тепло получено: $Q_{12} > 0$.

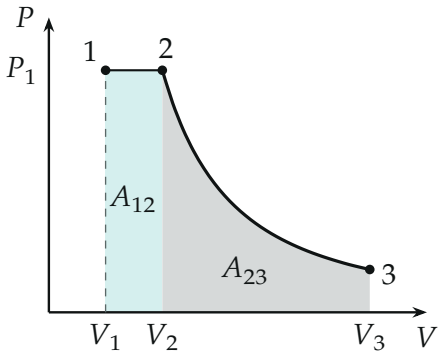


Рис. 1. Работа газа на изобаре A_{12} (бирюзовая площадь) и на адиабате A_{23} (серая площадь). Кривые построены для примера $V_2 = 2V_1$.

2. Изотерма 3-1 и адиабата 2-3. Точки 3 и 1 на одной изотерме: $T_3 = T_1$, значит, $U_3 = U_1$. На адиабате теплообмена нет, $Q_{23} = 0$, и по первому закону термодинамики газ совершает работу за счёт внутренней энергии:

$$0 = (U_3 - U_2) + A_{23} \quad \Rightarrow \quad A_{23} = U_2 - U_3 = U_2 - U_1 = \frac{3}{2}A_{12}.$$

Охлаждаясь на адиабате от T_2 до T_1, газ отдаёт работой ровно то, что получил внутренней энергией на изобаре.

Пункт 1.

3. Отношение работ. Делим на работу над газом при сжатии и пользуемся условием $A_{12} = \alpha A'_{31}$:

$$\frac{A_{23}}{A'_{31}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{A_{12}}{A'_{31}} = \frac{3}{2}\,\alpha.$$

Пункт 2.

4. Работа за цикл. Полная работа газа за цикл — сумма работ на трёх участках, она равна площади цикла (рис. 2):

$$A = A_{12} + A_{23} - A'_{31} = A_{12} + \frac{3}{2}A_{12} - \frac{A_{12}}{\alpha} = A_{12}\Big(\frac{5}{2} - \frac{1}{\alpha}\Big).$$

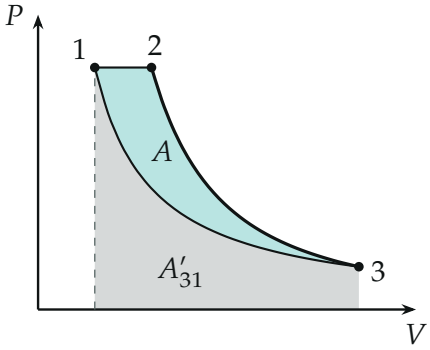


Рис. 2. Работа над газом при изотермическом сжатии A'_{31} — площадь под изотермой (серая и бирюзовая вместе); работа газа за цикл A — площадь самого цикла (бирюзовая).

5. Тепло, полученное за цикл. На изобаре газ получает $Q_{12} = \frac{5}{2}A_{12}$; на адиабате $Q_{23} = 0$; на изотермическом сжатии внутренняя энергия не меняется, и по первому закону $Q_{31} = -A'_{31} < 0$ — тепло отдаётся (рис. 3). Значит, полученное за цикл тепло — только Q_{12}.

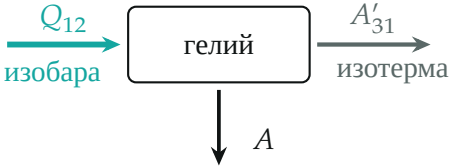


Рис. 3. Энергия за цикл: тепло Q_{12} получено на изобаре, тепло A'_{31} отдано на изотерме, разность — полезная работа $A = Q_{12} - A'_{31}$.

6. КПД. По определению — работа газа за цикл, делённая на полученное тепло:

$$\eta = \frac{A}{Q_{12}} = \frac{A_{12}(\frac{5}{2} - \frac{1}{\alpha})}{\frac{5}{2}A_{12}} = 1 - \frac{2}{5\alpha}.$$

Тот же результат через отданное тепло: $\eta = 1 - \dfrac{A'_{31}}{Q_{12}} = 1 - \dfrac{A_{12}/\alpha}{\frac{5}{2}A_{12}} = 1 - \dfrac{2}{5\alpha}$.

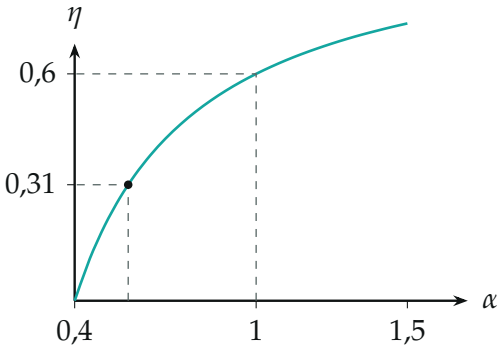


Рис. 4. КПД цикла $\eta = 1 - \frac{2}{5\alpha}$ (по точкам). Отмечен пример рис. 1–2 ($V_2 = 2V_1$): $\alpha = 1/\ln(4\sqrt{2}) \approx 0{,}58$, $\eta \approx 0{,}31$.

Обратите внимание. В знаменателе КПД — только полученное тепло Q_{12}, а не A_{12} и не сумма модулей всех теплот. И работа на адиабате находится без формулы адиабаты: её даёт равенство $U_3 = U_1$ на изотерме.

Ответ.

$$\boxed{\frac{A_{23}}{A'_{31}} = \frac{3}{2}\,\alpha, \qquad \eta = 1 - \frac{2}{5\alpha}}$$

Проверка. Обе величины безразмерны. Знак: КПД положителен, только если $\alpha > 0{,}4$, то есть $A_{12} + A_{23} = \frac{5}{2}A_{12} > A'_{31}$ — цикл обходится по часовой стрелке, и газ за цикл совершает положительную работу; на рисунке так и есть. Численная проверка для примера $V_2 = 2V_1$, $P_1V_1 = 1$ (python): $A_{12} = 1$, $A_{23} = 1{,}5$ (по формуле адиабаты $V_3 = V_2(T_2/T_1)^{3/2} = 4\sqrt{2}\,V_1$), $A'_{31} = \ln(4\sqrt{2}) = 1{,}733$; $A_{23}/A'_{31} = 0{,}866 = 1{,}5\alpha$ и $\eta = 0{,}767/2{,}5 = 0{,}307 = 1 - 2/(5\alpha)$.

Смысл: изотерма замыкает цикл в точке с той же внутренней энергией, поэтому вся «добыча» изобары возвращается на адиабате работой; КПД тем выше, чем меньше работа сжатия по сравнению с работой расширения.

Ответ. 1) $\dfrac{A_{23}}{A'_{31}} = \dfrac{3}{2}\,\alpha$; 2) $\eta = 1 - \dfrac{2}{5\alpha}$.