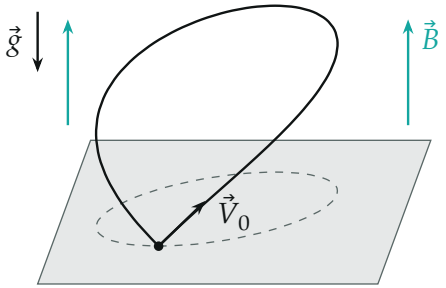
Заряженный шарик в магнитном поле и поле тяжести

Задача 3. [Физтех 2015/16, 11 класс, задача 3] Шарик массой m с зарядом q брошен с поверхности Земли со скоростью V_0 под углом α к горизонту. В области, где движется шарик, наряду с гравитационным полем создано однородное магнитное поле, линии индукции которого вертикальны. Через некоторое время шарик возвращается в точку старта. Силой сопротивления воздуха пренебречь.

1. Найти продолжительность полёта.
2. Найти возможные величины индукции магнитного поля.



Поясняющий рисунок (построен по точкам для $n = 1$): поле $\vec{B}$ вертикально; шарик поднимается и опускается, а его проекция на землю (пунктир) обходит окружность и возвращается в точку старта.

▲ **Решение. Что происходит.** Движение шарика раскладывается на вертикальное и горизонтальное, и они не мешают друг другу. Сила Лоренца $q\vec{v}\times\vec{B}$ при вертикальном $\vec{B}$ всегда горизонтальна, поэтому по вертикали на шарик действует только сила тяжести — вертикальное движение то же, что без поля, и время полёта обычное. По горизонтали действует только сила Лоренца, и она перпендикулярна горизонтальной скорости: проекция шарика на землю равномерно бежит по окружности. Шарик вернётся в точку старта, если к моменту падения эта проекция сделает целое число оборотов. Задача на движение заряда в магнитном поле

вместе с полем тяжести: принцип независимости движений и период обращения в магнитном поле.

Обозначения. Ось z — вертикально вверх, x и y — горизонтальны; начало — в точке старта. v_z — вертикальная, $\vec{v}_\perp$ — горизонтальная составляющая скорости, τ — время полёта, R — радиус окружности, по которой бежит проекция шарика на землю, T_B — период обращения по ней, n — число оборотов за полёт. Заряд берём по модулю $|q|$: знак заряда задаёт только направление обхода.

1. Почему движения независимы. Скорость $\vec{v} = \vec{v}_\perp + v_z\vec{e}_z$. Сила Лоренца

$$\vec{F}_Л = q\,\vec{v}\times\vec{B} = q\,\vec{v}_\perp\times\vec{B} + q\,v_z\,\vec{e}_z\times\vec{B} = q\,\vec{v}_\perp\times\vec{B},$$

второе слагаемое ноль: $\vec{e}_z \parallel \vec{B}$. Вектор $\vec{v}_\perp\times\vec{B}$ перпендикулярен $\vec{B}$, то есть горизонтален, и перпендикулярен $\vec{v}_\perp$ (рис. 1).

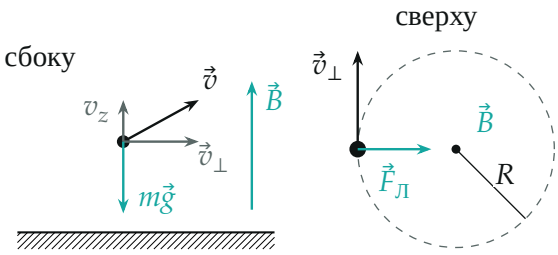


Рис. 1. Слева — вид сбоку: вертикально действует только $m\vec{g}$. Справа — вид сверху ($\vec{B}$ на нас): сила Лоренца $\vec{F}_Л$ горизонтальна, перпендикулярна $\vec{v}_\perp$ и направлена к центру окружности радиуса R.

Пункт 1.

2. Время полёта. Второй закон Ньютона в проекции на ось z: $ma_z = -mg$ (сила Лоренца на z не проецируется). Значит, по вертикали шарик движется как в отсутствие поля:

$$z = V_0\sin\alpha\cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

Он снова на земле, когда $z = 0$ при $t \neq 0$:

$$\tau = \frac{2V_0 \sin\alpha}{g}.$$

Пункт 2.

3. Горизонтальное движение. Сила Лоренца перпендикулярна $\vec{v}_\perp$ и работы не совершает, поэтому модуль горизонтальной скорости постоянен: $v_\perp = V_0 \cos\alpha$. Постоянная по модулю сила, всё время перпендикулярная скорости, ведёт проекцию шарика по окружности. Второй закон Ньютона в горизонтальной плоскости, в проекции на радиус к центру:

$$\frac{mv_\perp^2}{R} = |q|v_\perp B \quad \Rightarrow \quad R = \frac{mv_\perp}{|q|B} = \frac{mV_0\cos\alpha}{|q|B}.$$

Период обращения

$$T_B = \frac{2\pi R}{v_\perp} = \frac{2\pi m}{|q|B}$$

не зависит от скорости (и от угла броска).

4. Условие возвращения. В точку старта шарик вернётся, если в момент падения его проекция на землю снова в начальной точке окружности. Окружность проходит через точку старта, поэтому нужно, чтобы за время полёта проекция сделала целое число оборотов (рис. 2):

$$\tau = nT_B, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Подставим τ и T_B:

$$\frac{2V_0\sin\alpha}{g} = n \cdot \frac{2\pi m}{|q|B} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\pi m g}{|q|V_0 \sin\alpha}\, n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

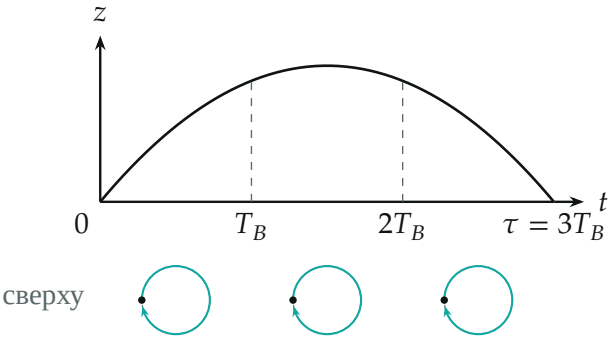


Рис. 2. Сверху — высота шарика от времени (одна и та же при любом B). Внизу — проекция на землю: за каждый период T_B она обходит окружность целиком. Пример $n = 3$: к моменту падения сделано три оборота, шарик в точке старта.

5. Что меняется с n. С ростом n поле сильнее, радиус $R = \dfrac{mV_0 \cos\alpha}{|q|B}$ меньше, а обходов больше (рис. 3): при $n = 1$ проекция делает один большой круг, при $n = 2$ — два круга вдвое меньшего радиуса по одной окружности.

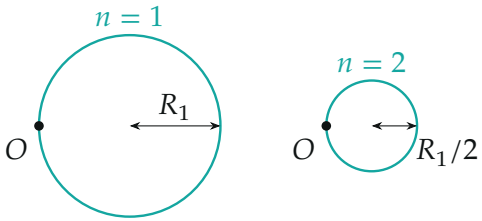


Рис. 3. Проекция траектории на землю при $n = 1$ и $n = 2$ (вид сверху, в одном масштабе): при вдвое большем поле радиус вдвое меньше, а окружность обходится дважды. O — точка старта.

Обратите внимание. Магнитное поле не меняет ни времени полёта, ни высоты подъёма: сила Лоренца горизонтальна. И ответ — не одно значение, а набор: подходит любое целое число оборотов $n \geqslant 1$.

Ответ.

$$\tau = \frac{2V_0 \sin\alpha}{g}, \qquad B_n = \frac{\pi mg}{|q|V_0 \sin\alpha}\, n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Проверка. Размерность: $[qB] = $ кг/с (из $T_B = 2\pi m/(qB)$ — секунды), тогда $\dfrac{mg}{qV_0}$ — это $\dfrac{\text{кг}\cdot\text{м/с}^2}{\text{Кл}\cdot\text{м/с}} = \dfrac{\text{Н}}{\text{Кл}\cdot\text{м/с}} = $ Тл, верно. Предельный случай: бросок вертикально вверх ($\alpha = 90°$) — горизонтальной скорости нет, шарик возвращается при любом B; формула при этом даёт дискретный набор, но радиус $R \propto \cos\alpha = 0$, и окружность стягивается в точку — противоречия нет, условие «целое число оборотов» становится лишним. Ещё одна проверка: при $n = 1$ и $\alpha \to 0$ (бросок почти горизонтально) время полёта мало, и для одного оборота за это время нужно очень сильное поле — формула даёт $B \to \infty$.

Смысл: вертикаль отмеряет время полёта, магнитное поле — время одного оборота по горизонтали; шарик вернётся, если одно укладывается в другом целое число раз.

Ответ. 1) $\tau = \dfrac{2V_0\sin\alpha}{g}$; 2) $B = \dfrac{\pi mg}{|q|V_0\sin\alpha}n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$