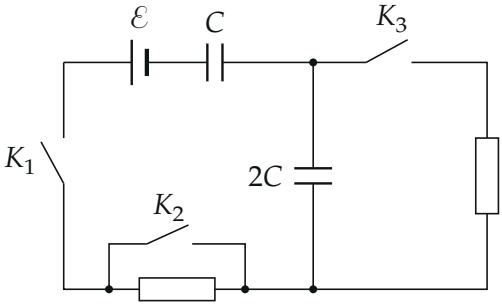
Конденсаторы и три ключа

Задача 4. [Физтех 2015/16, 11 класс, задача 4] В электрической цепи (см. рис.) все элементы идеальные, их параметры указаны, ключи разомкнуты, конденсаторы не заряжены. Сначала замыкают ключ K_1. После установления режима в цепи замыкают ключ K_2. Затем замыкают ключ K_3 и размыкают его, когда напряжение на конденсаторе C становится в 4 раза больше напряжения на конденсаторе $2C$.

1. Найти отношение зарядов на конденсаторе $2C$ после размыкания K_3 и перед замыканием K_3.
2. Найти количество теплоты, которое выделится в цепи при замкнутом ключе K_3.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на зарядку конденсаторов и закон сохранения энергии в цепи. После замыкания K_1 источник заряжает последовательно соединённые конденсаторы C и $2C$ через нижний резистор, пока ток не прекратится. Ключ K_2 закорачивает нижний резистор — в установившемся режиме тока нет, поэтому ничего не меняется. Ключ K_3 подключает к конденсатору $2C$ правый резистор: конденсатор $2C$ разряжается через него, а через источник идёт ток, который дозаряжает конденсатор C. Напряжения в любой момент связаны правилом Кирхгофа для контура «источник — C — $2C$». Теплоту даёт энергетический баланс: работа источника = прирост энергии конденсаторов + теплота.

Обозначения. q_0 — заряд каждого конденсатора перед замыканием K_3; U_1 — напряжение на конденсаторе $2C$ в момент размыкания K_3, тогда на C — $4U_1$; q_1 — заряд конденсатора $2C$ в этот момент; Δq — заряд, прошедший через источник при замкнутом K_3; W — энергия конденсаторов, Q — теплота.

Пункт 1.

1. Заряд перед замыканием K_3. После замыкания K_1 ток идёт по контуру «источник — C — $2C$ — нижний резистор». В установившемся режиме тока нет, напряжения на резисторах равны нулю. Конденсаторы соединены последовательно: через них прошёл один и тот же заряд, q_0 на каждом (рис. 1). Правило Кирхгофа для этого контура:

$$\mathcal{E} = \frac{q_0}{C} + \frac{q_0}{2C} = \frac{3q_0}{2C} \quad \Rightarrow \quad q_0 = \frac{2}{3}C\mathcal{E}.$$

Напряжения: на C — $\frac{2}{3}\mathcal{E}$, на $2C$ — $\frac{1}{3}\mathcal{E}$. Замыкание K_2 тока не вызывает: ток в цепи уже равен нулю, закорачивание резистора, на котором нет напряжения, ничего не меняет.

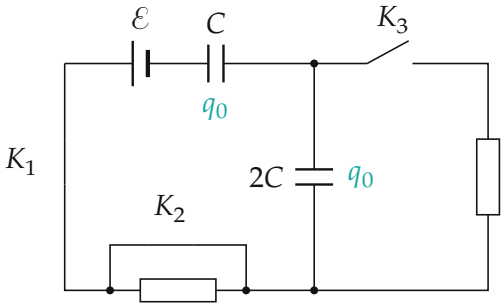


Рис. 1. Ключи K_1 и K_2 замкнуты, режим установился: на конденсаторах C и $2C$ одинаковые заряды q_0.

2. Напряжения при размыкании K_3. Когда K_3 замкнут, контур «источник — C — $2C$» по-прежнему замкнут через ключи K_1, K_2 (резистора в нём нет — его закоротил K_2). Правило Кирхгофа для этого контура в любой момент: $\mathcal{E} = U_C + U_{2C}$. В момент размыкания $U_C = 4U_1$,

$U_{2C} = U_1$ (рис. 2):

$$\mathcal{E} = 4U_1 + U_1 \quad \Rightarrow \quad U_1 = \frac{\mathcal{E}}{5}.$$

Конденсатор $2C$ разрядился с $\frac{1}{3}\mathcal{E}$ до $\frac{1}{5}\mathcal{E}$, конденсатор C зарядился с $\frac{2}{3}\mathcal{E}$ до $\frac{4}{5}\mathcal{E}$.

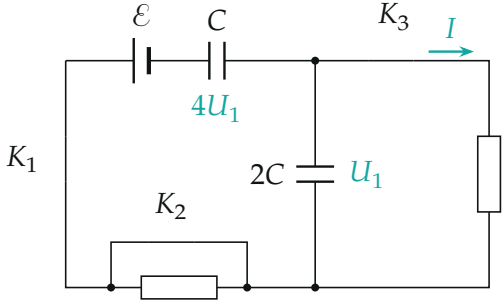


Рис. 2. Ключ K_3 замкнут: конденсатор $2C$ разряжается через правый резистор, через источник идёт ток I и дозаряжает C. В момент размыкания напряжения $4U_1$ и U_1.

3. Отношение зарядов.

$$q_1 = 2C\,U_1 = \frac{2}{5}\,C\mathcal{E}, \qquad \frac{q_1}{q_0} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}.$$

Пункт 2.

4. Заряд через источник. Источник включён последовательно с конденсатором C, поэтому заряд, прошедший через источник, равен приросту заряда конденсатора C:

$$\Delta q = C \cdot 4U_1 - q_0 = \frac{4}{5}\,C\mathcal{E} - \frac{2}{3}\,C\mathcal{E} = \frac{2}{15}\,C\mathcal{E}.$$

Работа источника (заряд прошёл от «минуса» к «плюсу», $\Delta q > 0$):

$$A = \Delta q\,\mathcal{E} = \frac{2}{15}\,C\mathcal{E}^2.$$

5. Энергия конденсаторов. До замыкания K_3 и после его размыкания:

$$W_0 = \frac{q_0^2}{2C} + \frac{q_0^2}{2\cdot 2C} = \frac{3}{4}\cdot\frac{q_0^2}{C} = \frac{1}{3}C\mathcal{E}^2,$$

$$W_1 = \frac{C\,(4U_1)^2}{2} + \frac{2C\,U_1^2}{2} = 9C\,U_1^2 = \frac{9}{25}C\mathcal{E}^2.$$

$$\Delta W = W_1 - W_0 = \frac{27-25}{75}C\mathcal{E}^2 = \frac{2}{75}C\mathcal{E}^2.$$

6. Теплота. Закон сохранения энергии для цепи за время, пока K_3 замкнут: работа источника идёт на изменение энергии конденсаторов и на теплоту в резисторе (рис. 3):

$$Q = A - \Delta W = \frac{10}{75}C\mathcal{E}^2 - \frac{2}{75}C\mathcal{E}^2 = \frac{8}{75}C\mathcal{E}^2.$$

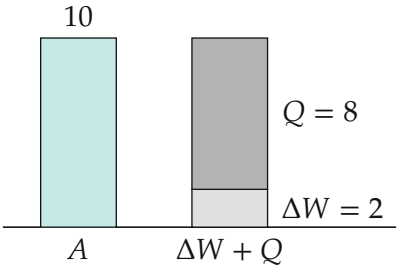


Рис. 3. Баланс энергии в единицах $\frac{1}{75}C\mathcal{E}^2$: из работы источника 10 лишь 2 идут в энергию конденсаторов, 8 — в теплоту.

Второй способ для шага 5. Энергию конденсаторов можно считать через напряжения: $W_0 = \frac{C}{2}\left(\frac{2}{3}\mathcal{E}\right)^2 + \frac{2C}{2}\left(\frac{1}{3}\mathcal{E}\right)^2 = \frac{4}{18}C\mathcal{E}^2 + \frac{2}{18}C\mathcal{E}^2 = \frac{1}{3}C\mathcal{E}^2$ — то же.

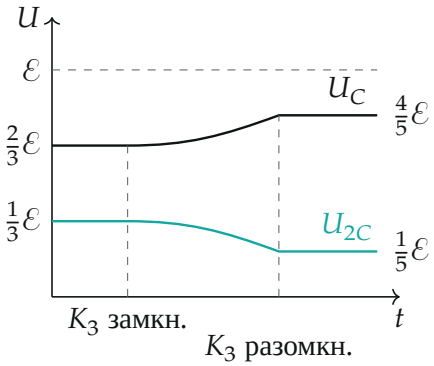


Рис. 4. Напряжения на конденсаторах (качественно): пока K_3 замкнут, $2C$ разряжается, C заряжается, сумма всё время равна $\mathcal{E}$.

Обратите внимание. Ключ K_2 в момент замыкания ничего не меняет, но он нужен потом: без него при замкнутом K_3 ток источника шёл бы и через нижний резистор. На ответ это не влияет — теплота считается из баланса энергии и не зависит от того, в каких резисторах она выделилась.

Ответ.

$$\boxed{\frac{q_1}{q_0} = \frac{3}{5}; \qquad Q = \frac{8}{75}C\mathcal{E}^2}$$

Проверка. Размерность: $C\mathcal{E}^2$ — энергия. Знак: $Q > 0$, теплота выделяется. Если бы K_3 держали замкнутым до конца, $2C$ разрядился бы полностью, а C зарядился до $\mathcal{E}$: $\Delta q = \frac{1}{3}C\mathcal{E}$, $A = \frac{1}{3}C\mathcal{E}^2$, $\Delta W = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2 - \frac{1}{3}C\mathcal{E}^2 = \frac{1}{6}C\mathcal{E}^2$, $Q = \frac{1}{6}C\mathcal{E}^2 \approx 0{,}17\,C\mathcal{E}^2$ — больше нашего $0{,}11\,C\mathcal{E}^2$, как и должно быть при неполном процессе.

Смысл: заряд на конденсаторе $2C$ уменьшился до $\frac{3}{5}$ прежнего, а из работы источника $\frac{4}{5}$ ушло в тепло.

Ответ. 1) $\dfrac{q_1}{q_0} = \dfrac{3}{5}$; 2) $Q = \dfrac{8}{75}C\mathcal{E}^2$.