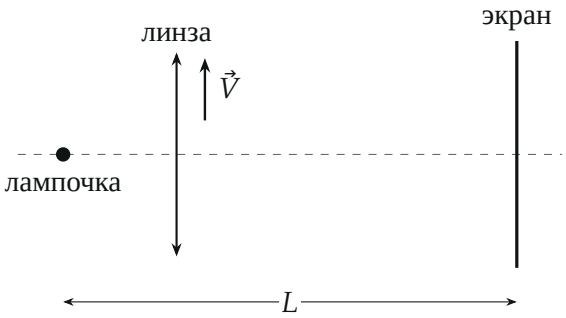
Скорость изображения при сдвиге линзы

Задача 5. [Физтех 2015/16, 11 класс, задача 5] Маленькая лампочка находится вблизи главной оптической оси тонкой линзы с фокусным расстоянием $F = 15$ см. На экране, расположенном на расстоянии $L = 80$ см от лампочки, получено увеличенное изображение нити накала. Линзу перемещают поступательно и перпендикулярно её главной оптической оси со скоростью $V = 2$ мм/с.

1. Найти расстояние между линзой и лампочкой.
2. Найти скорость изображения на экране.



Поясняющий рисунок: лампочка и экран неподвижны, линза между ними движется поперёк оси.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на формулу тонкой линзы и на построение изображения точки лучом через оптический центр. Лампочка и экран неподвижны, расстояние между ними L задано. Изображение на экране действительное, значит, линза собирающая и стоит между лампочкой и экраном; расстояния от линзы до лампочки и до экрана в сумме дают L. Таких положений линзы два, увеличенное изображение получается в том, что ближе к лампочке. Когда линза сдвигается поперёк оси, изображение смещается вдоль экрана: оно всегда лежит на прямой «лампочка — оптический центр линзы».

Обозначения. d — расстояние от лампочки до линзы, f — от линзы до экрана (изображения), $\Gamma = f/d$ — увеличение, u — скорость изображения на экране, y — смещение линзы поперёк оси, Y — смещение изображения.

Пункт 1.

1. Два уравнения. Формула тонкой собирающей линзы для действительного изображения и условие, что экран на расстоянии L от лампочки:

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}, \qquad d+f=L.$$

2. Квадратное уравнение. Подставим $f=L-d$: $\dfrac{L}{d\,(L-d)}=\dfrac{1}{F}$, то есть

$$d^2-Ld+LF=0 \quad\Rightarrow\quad d=\frac{L\pm\sqrt{L\,(L-4F)}}{2},$$

$$d=\frac{80\pm\sqrt{80\cdot 20}}{2}\text{ см}=\frac{80\pm 40}{2}\text{ см}.$$

Корни $d=20$ см и $d=60$ см: два положения линзы, симметричные относительно середины отрезка лампочка–экран (рис. 1).

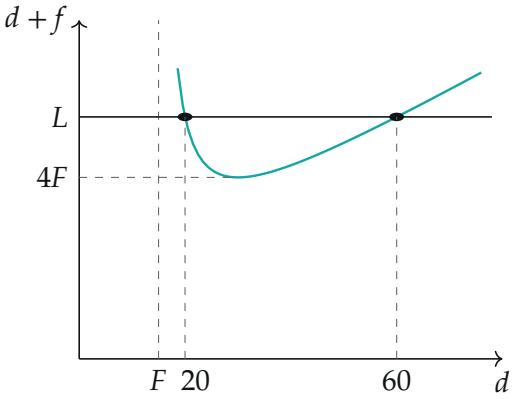


Рис. 1. Расстояние от предмета до действительного изображения $d+f=\dfrac{d^2}{d-F}$ (в см, бирюзовая кривая): прямая $L=80$ см пересекает её дважды. Минимум $4F$ — при $d=2F$, поэтому при $L<4F$ изображения на экране не получить.

3. Какое положение даёт увеличение. Увеличение $\Gamma=\dfrac{f}{d}$. При $d=20$ см $f=60$ см, $\Gamma=3$ — изображение увеличенное; при $d=60$ см

$\Gamma = \frac{1}{3}$ — уменьшенное. Значит,

$$d = \frac{L - \sqrt{L\,(L - 4F)}}{2} = 20 \text{ см}.$$

Ход лучей — на рис. 2.

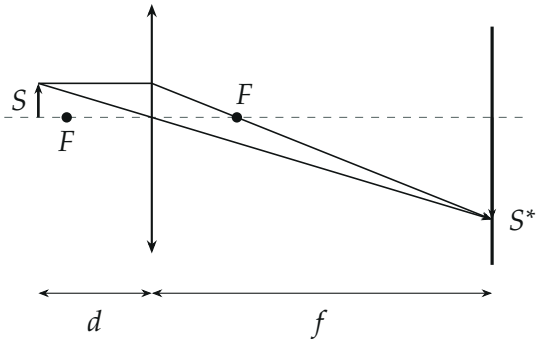


Рис. 2. Построение изображения нити S при $d = 20$ см, $f = 60$ см: луч, параллельный оси, после линзы идёт через фокус; луч через центр не преломляется. Изображение S^* перевёрнутое, втрое больше.

Пункт 2.

4. Где изображение при сдвинутой линзе. Изображение точки лежит на луче, который идёт через оптический центр линзы без преломления. Пусть линза сдвинулась поперёк оси на y; её центр теперь в точке O'. Лампочка S на месте, поэтому изображение лежит на прямой SO' на экране, а экран по-прежнему на расстоянии f за линзой (продольные расстояния не изменились, изображение остаётся резким). Подобие треугольников с общей вершиной S (рис. 3):

$$\frac{Y}{y} = \frac{d+f}{d} = \frac{L}{d}.$$

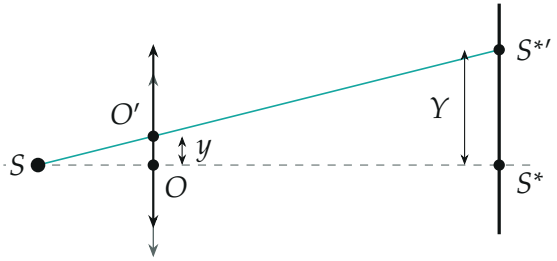


Рис. 3. Линза сдвинулась на y (серая — прежнее положение): изображение лежит на прямой SO' и сдвигается на $Y = y\,L/d$ в ту же сторону.

5. Скорость изображения. Смещение Y пропорционально y в любой момент, поэтому и скорости в том же отношении:

$$u = \frac{L}{d}\,V = \frac{80}{20}\cdot 2\ \text{мм/с} = 8\ \text{мм/с}.$$

Изображение движется в ту же сторону, что и линза.

Второй способ. Перейдём в систему отсчёта линзы. В ней лампочка движется со скоростью V в обратную сторону, а её изображение — со скоростью $\Gamma V = 3V$ в сторону, противоположную лампочке (изображение перевёрнутое), то есть в ту же сторону, что линза относительно земли. Обратно в систему экрана: $u = V + 3V = 4V = 8$ мм/с — то же (рис. 4).

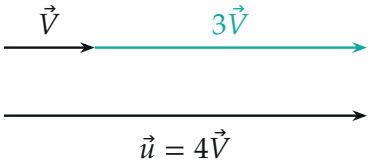


Рис. 4. Скорость изображения относительно экрана: скорость линзы $\vec{V}$ плюс скорость изображения относительно линзы $\Gamma\vec{V} = 3\vec{V}$.

Обратите внимание. Из двух корней нужен меньший: условие говорит об увеличенном изображении. И $u/V = L/d = 1 + \Gamma$, а не Γ: линза сама движется, и к скорости изображения относительно линзы надо прибавить её скорость.

Ответ.

$$d = \frac{L - \sqrt{L\,(L - 4F)}}{2} = 20 \text{ см}; \qquad u = \frac{L}{d}\,V = 8 \text{ мм/с}$$

Проверка. $\frac{1}{20} + \frac{1}{60} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$ — формула линзы выполнена. Размерность: u — скорость. Предел: формула $u = \frac{L}{d}V$ при линзе у самого экрана ($d \to L$) даёт $u \to V$ — изображение лежит прямо на линзе и движется вместе с ней; так и должно быть.

Смысл: линза работает как рычаг с опорой в лампочке — изображение на экране «качается» в $L/d = 4$ раза сильнее линзы.

Ответ. 1) $d = 20$ см; 2) $u = 8$ мм/с.