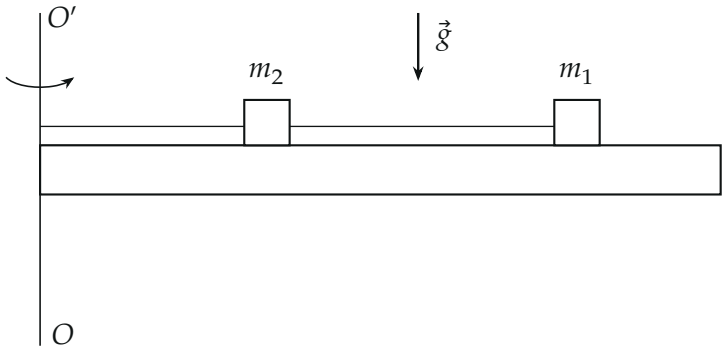
Бруски на вращающейся платформе

Задача 2. [Физтех 2015/16, 9 класс, задача 2] Два небольших по размерам бруска находятся на гладкой горизонтальной платформе. Бруски связаны нитью и привязаны другой нитью к оси OO' (см. рис.). Расстояния брусков от оси OO' отличаются в 3 раза. Отношение масс брусков $m_2/m_1 = 3$. Система вращается вокруг вертикальной оси OO'.

1. Найти отношение сил натяжения нитей между осью OO' и бруском m_2 и между грузами.



▲ **Решение. Что происходит.** Бруски вместе с платформой вращаются вокруг оси с одной и той же угловой скоростью ω, то есть каждый движется по окружности. Для движения по окружности нужно центростремительное ускорение, а создать его на гладкой платформе могут только нити: трения нет, сила тяжести и реакция опоры вертикальны. Внешний брусок m_1 тянет к оси одна нить, внутренний m_2 — разность двух нитей: внутренняя тянет его к оси, внешняя — от оси. Задача на динамику движения по окружности: второй закон Ньютона для каждого бруска в проекции на радиус.

Обозначения. ω — угловая скорость вращения; r — расстояние от оси до бруска m_2, тогда до бруска m_1 расстояние $3r$ (на рисунке условия m_2 ближе к оси); T_2 — сила натяжения нити «ось — брусок m_2», T_1 — нити «m_2 — m_1». Нити лёгкие, поэтому натяжение вдоль каждой нити одно и то же. Бруски малы — считаем их точками.

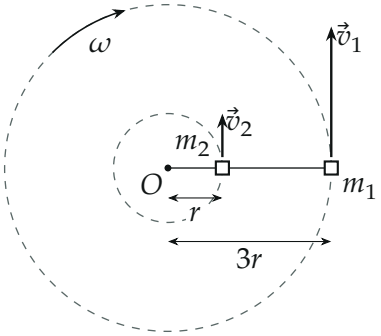


Рис. 1. Вид сверху: бруски движутся по окружностям радиусов r и $3r$ с одной угловой скоростью ω, поэтому внешний движется втрое быстрее.

1. Ускорения брусков. Бруски движутся по окружностям с постоянной угловой скоростью ω, поэтому их ускорения направлены к оси (центростремительные) и равны

$$a_2 = \omega^2 r, \qquad a_1 = \omega^2 \cdot 3r.$$

Внешний брусок имеет втрое большее ускорение: радиус втрое больше, а ω у всех точек платформы одна.

2. Силы, действующие на бруски. Нарисуем каждый брусок отдельно (рис. 2). Ось x направим от бруска к оси вращения — туда, куда направлено ускорение, тогда проекции ускорений положительны. Вертикальные силы $m\vec{g}$ и $\vec{N}$ уравновешены и в уравнение по оси x не входят.

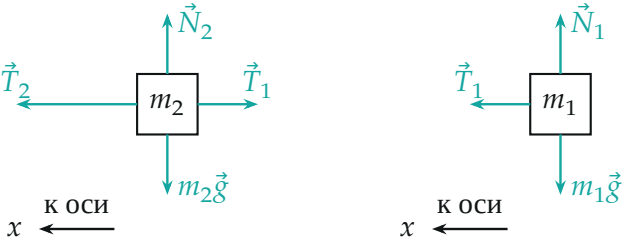


Рис. 2. Силы на каждом бруске (ось вращения — слева). Нить T_1 тянет m_1 к оси, а m_2 — от оси.

На брусок m_1 по горизонтали действует только нить между грузами: она тянет его к оси с силой T_1. На брусок m_2 действуют две нити: внутренняя тянет к оси с силой T_2, внешняя — от оси с силой T_1 (нить тянет оба бруска друг к другу, по третьему закону Ньютона с одинаковой силой).

3. Второй закон Ньютона в проекции на ось x. Для бруска m_1:

$$m_1 \cdot \omega^2 \cdot 3r = T_1.$$

Для бруска m_2:

$$m_2\,\omega^2 r = T_2 - T_1.$$

4. Отношение натяжений. Из второго уравнения $T_2 = T_1 + m_2\omega^2 r$. Делим на первое:

$$\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{m_2\omega^2 r}{3m_1\omega^2 r} = 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{m_2}{m_1} = 1 + \frac{1}{3}\cdot 3 = 2.$$

Угловая скорость и радиус сократились: ответ не зависит от того, как быстро вращается платформа.

5. Тот же ответ одним взглядом на систему. Рассмотрим оба бруска вместе с нитью между ними как одно тело (рис. 3). Внутренние силы T_1 взаимно уничтожаются, снаружи по горизонтали действует только T_2. Сумма «масса × ускорение» по всем частям равна T_2:

$$T_2 = m_2\omega^2 r + m_1\omega^2\cdot 3r = \omega^2 r\,(m_2 + 3m_1) = \omega^2 r\cdot 6m_1,$$

а $T_1 = 3m_1\omega^2 r$. Отношение снова $T_2/T_1 = 6/3 = 2$.

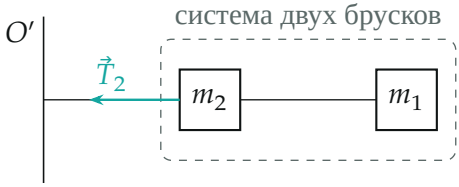


Рис. 3. Система «два бруска + нить между ними»: внешняя горизонтальная сила одна — натяжение внутренней нити $\vec{T}_2$.

6. Как меняется натяжение вдоль нитей. На рис. 4 — натяжение нити в зависимости от расстояния до оси (по вычисленным значениям в единицах $m_1\omega^2 r$): от оси до бруска m_2 оно равно 6, за бруском — 3, за бруском m_1 нити нет. На каждом бруске натяжение скачком падает на величину «масса × центростремительное ускорение» этого бруска: на $m_2\omega^2 r = 3$ и на $m_1\omega^2 \cdot 3r = 3$.

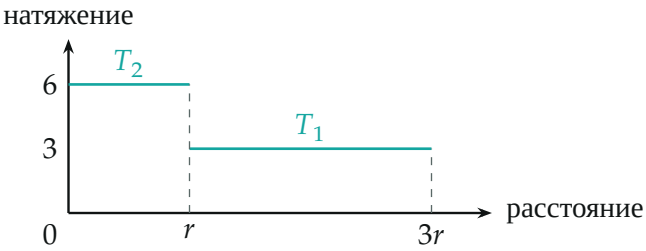


Рис. 4. Натяжение нитей вдоль радиуса в единицах $m_1\omega^2 r$: скачки на брусках равны их «массе × ускорению».

Обратите внимание. Внутренний брусок тянут две нити в противоположные стороны, поэтому в уравнении для него стоит разность $T_2 - T_1$, а не одна T_2. И ускорения брусков разные: у внешнего радиус втрое больше, хотя угловая скорость одна.

Ответ.

$$\boxed{\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{r}{3r} = 2}$$

Проверка. Отношение сил безразмерно. Предельный случай: если бы брусок m_2 был невесомым ($m_2 \to 0$), обе нити тянули бы один брусок m_1, и натяжения совпали бы: $T_2/T_1 = 1$ — формула это даёт. Второй способ (шаг 5, через систему двух брусков) дал то же число.

Смысл: внутренняя нить держит на окружностях оба бруска, внешняя — только внешний; вклады брусков $m_2\omega^2 r$ и $m_1\omega^2 \cdot 3r$ здесь равны, поэтому внутренняя нить натянута вдвое сильнее.

Ответ. $\dfrac{T_2}{T_1} = 2$, где T_2 — натяжение нити между осью и бруском m_2, T_1 — между грузами.