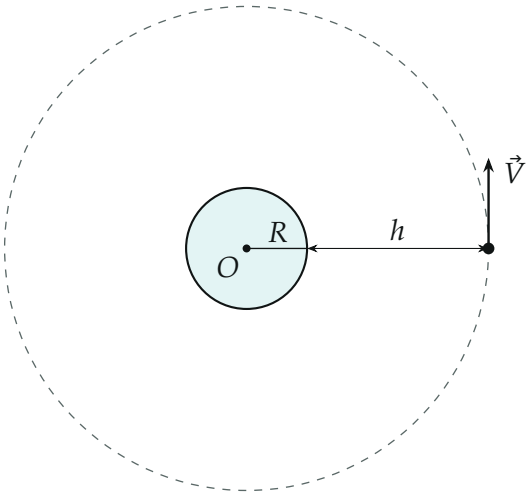
Спутник на высоте

Задача 3. [Физтех 2015/16, 9 класс, задача 3] Радиус планеты R. На какой высоте, считая от поверхности планеты, скорость спутника, движущегося по круговой орбите, будет в 2 раза меньше первой космической скорости для этой планеты?



Поясняющий рисунок: планета радиуса R и круговая орбита спутника на высоте h над поверхностью.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Спутник на круговой орбите движется равномерно по окружности. Центростремительное ускорение ему сообщает одна сила — притяжение планеты, и эта сила слабеет с расстоянием как $1/r^2$. Поэтому чем дальше орбита, тем меньше скорость, нужная, чтобы на ней удержаться. Первая космическая скорость — скорость на круговой орбите у самой поверхности, при $r = R$. Задача на закон всемирного тяготения и второй закон Ньютона для движения по окружности.

Обозначения. M — масса планеты, m — масса спутника, G — гравитационная постоянная; r — радиус орбиты (расстояние от центра планеты O до спутника), $h = r - R$ — искомая высота; V_1 — первая космическая скорость, V — скорость спутника на орбите радиуса r. Планету

считаем однородным шаром: тогда она притягивает как точка массы M в центре.

1. Скорость на круговой орбите радиуса r. На спутник действует только сила тяготения $F = G\dfrac{Mm}{r^2}$, направленная к центру планеты (рис. 1). Спутник движется по окружности с постоянной по модулю скоростью, поэтому его ускорение центростремительное: $a = V^2/r$, к центру. Второй закон Ньютона для спутника в проекции на радиус, направленный к центру:

$$m\frac{V^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2} \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

Масса спутника сократилась: скорость на орбите от неё не зависит.

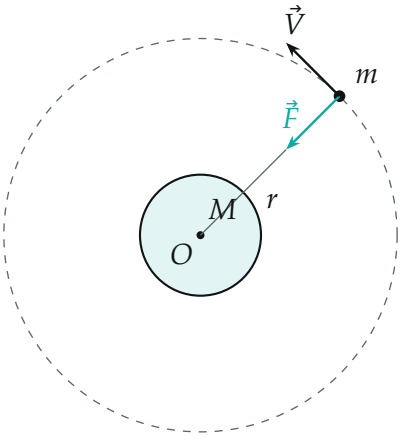


Рис. 1. Сила тяготения $\vec{F}$ направлена к центру и перпендикулярна скорости $\vec{V}$: она поворачивает скорость, не меняя её модуль.

2. Первая космическая скорость. Это та же формула при $r = R$:

$$V_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}}.$$

3. Условие задачи. Делим скорость на орбите на первую космиче-

скую:

$$\frac{V}{V_1} = \sqrt{\frac{R}{r}}.$$

По условию $V = V_1/2$, то есть $\sqrt{R/r} = 1/2$. Возводим в квадрат: $R/r = 1/4$, откуда

$$r = 4R.$$

Скорость падает как корень из расстояния, поэтому, чтобы уменьшить её вдвое, радиус орбиты надо увеличить вчетверо (рис. 2).

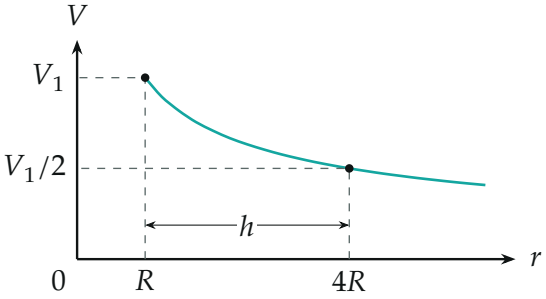


Рис. 2. Скорость на круговой орбите $V = V_1\sqrt{R/r}$ (построено по точкам). Вдвое меньшая скорость — на радиусе $4R$, то есть на высоте $h = 3R$.

4. Высота над поверхностью. Радиус орбиты отсчитывается от центра планеты, а высота — от поверхности, поэтому

$$h = r - R = 4R - R = 3R.$$

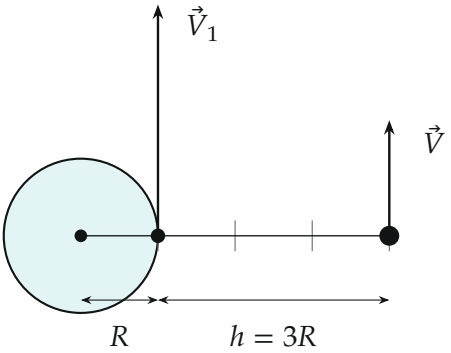


Рис. 3. Масштабный чертёж: спутник у поверхности (скорость V_1) и на радиусе $4R$ (скорость вдвое меньше). Штрихи — через каждые R.

Обратите внимание. В формулу $V = \sqrt{GM/r}$ входит расстояние до центра планеты, а не высота над поверхностью. Ответ «$r = 4R$» — ещё не ответ: спрашивают высоту, $h = 3R$.

Ответ.

$$h = r - R, \quad r = R\Big(\frac{V_1}{V}\Big)^2 = 4R \quad \Rightarrow \quad h = 3R$$

Проверка. Размерность: h выражена через R — длина. Предельный случай: если $V = V_1$, формула $r = R(V_1/V)^2$ даёт $r = R$ и $h = 0$ — спутник у поверхности, как и должно быть. Второй способ — через период: из $V = \sqrt{GM/r}$ период обращения $T = 2\pi r/V \propto r^{3/2}$, это третий закон Кеплера. На радиусе $4R$ период больше в $4^{3/2} = 8$ раз, а длина орбиты — в 4 раза, значит, скорость в $8/4 = 2$ раза меньше, как и требовалось.

Смысл: скорость на круговой орбите убывает медленно, как $1/\sqrt{r}$; чтобы замедлиться вдвое, спутник должен уйти от центра вчетверо дальше.

Ответ. $h = 3R$.