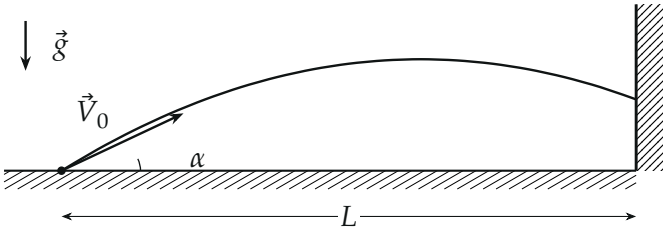
Шарик и упругая стена

Задача 4. [Физтех 2015/16, 9 класс, задача 4] Маленький шарик, брошенный под углом $\alpha = 15°$ к горизонту с начальной скоростью $V_0 = 10$ м/с, упруго ударяется о вертикальную стену, находящуюся на расстоянии $L = 4$ м от места броска. Плоскость стены перпендикулярна плоскости траектории шарика. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2. Известно, что при любых углах α справедливо $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$.

1. Найдите расстояние (по горизонтали) от места броска, на котором шарик поднимется на максимальную высоту.
2. На каком расстоянии от места броска шарик упадет на горизонтальную поверхность земли?



Поясняющий рисунок: бросок под углом α к стене, стоящей на расстоянии L. Траектория до удара построена по вычисленным точкам; по вертикали масштаб увеличен (на чертежах 1 м по вертикали в 2,3 раза длиннее, чем по горизонтали).

▲ **Решение.** **Что происходит.** Шарик летит по параболе. Летел бы он без стены — упал бы на расстоянии L_0 от места броска. Если $L_0 > L$, стена встаёт на пути, шарик отскакивает и летит назад. При упругом ударе о гладкую вертикальную стену горизонтальная проекция скорости меняет знак, а вертикальная не меняется. Поэтому полёт после удара — зеркальное отражение (в плоскости стены) того куска параболы, который шарик пролетел бы за стеной. Задача на бросок под углом к горизонту: движения по горизонтали и вертикали независимы, удар о стену задевает только горизонтальное.

Обозначения. Начало координат — в точке броска O, ось x горизонтально к стене, ось y вертикально вверх, время t — от броска. $V_{0x} = V_0\cos\alpha$, $V_{0y} = V_0\sin\alpha$ — проекции начальной скорости. L_0 — дальность полёта без стены, x_H — искомое расстояние до точки максимального подъёма, l — расстояние от места броска до точки падения.

1. Закон движения до удара. На шарик действует только сила тяжести, его ускорение $\vec{a} = \vec{g}$ постоянно. Проекции на оси ($g_x = 0, g_y = -g$):

$$x: \quad v_x = V_0\cos\alpha, \qquad x = V_0\cos\alpha\cdot t;$$
$$y: \quad v_y = V_0\sin\alpha - gt, \quad y = V_0\sin\alpha\cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

2. Дальность полёта без стены. Шарик вернулся бы на землю ($y = 0$) в момент $t_0 = \dfrac{2V_0\sin\alpha}{g}$ и пролетел бы по горизонтали

$$L_0 = V_0\cos\alpha\cdot t_0 = \frac{2V_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{V_0^2\sin 2\alpha}{g} = \frac{100\cdot\sin 30^\circ}{10}\text{ м} = 5\text{ м}.$$

Здесь пригодилась формула $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ из условия. $L_0 = 5$ м больше $L = 4$ м — значит, шарик долетает до стены, не коснувшись земли.

Пункт 1.

3. Где шарик выше всего. В верхней точке вертикальная проекция скорости обращается в ноль: $V_0\sin\alpha - gt_H = 0$, $t_H = \dfrac{V_0\sin\alpha}{g} = \dfrac{t_0}{2}$. За это время по горизонтали шарик пролетит

$$x_H = V_0\cos\alpha\cdot t_H = \frac{V_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{V_0^2\sin 2\alpha}{2g} = \frac{L_0}{2} = 2{,}5\text{ м}.$$

Это меньше $L = 4$ м: верхняя точка пройдена до удара, и стена на неё не влияет (рис. 1). Сама высота подъёма $H = \dfrac{(V_0\sin\alpha)^2}{2g} \approx 0{,}33$ м.

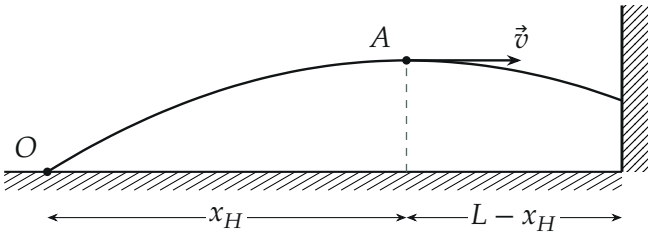


Рис. 1. Верхняя точка A — посередине между местом броска и точкой, где шарик упал бы без стены: $x_H = L_0/2 = 2{,}5$ м. Скорость в ней горизонтальна.

Пункт 2.

4. Удар о стену. Шарик подлетает к стене в момент $t_1 = \dfrac{L}{V_0 \cos\alpha} \approx 0{,}41$ с на высоте $y_1 = V_0 \sin\alpha \cdot t_1 - \dfrac{gt_1^2}{2} \approx 0{,}21$ м > 0, уже опускаясь: $v_y = V_0 \sin\alpha - gt_1 \approx -1{,}55$ м/с. Стена гладкая, удар упругий: сила со стороны стены горизонтальна и меняет только горизонтальную проекцию скорости — на противоположную, не меняя модуль. Вертикальная проекция не меняется (рис. 2):

$$v'_x = -V_0 \cos\alpha, \qquad v'_y = v_y.$$

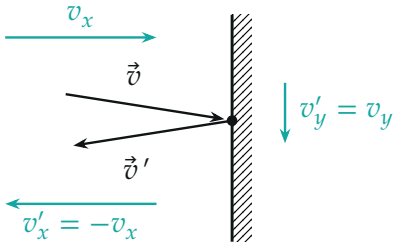


Рис. 2. Упругий удар о гладкую вертикальную стену: горизонтальная проекция скорости меняет знак, вертикальная остаётся прежней. Угол падения равен углу отражения.

5. Зеркальный приём. После удара вертикальное движение идёт так же, как шло бы без стены (то же v_y, то же ускорение g), значит, шарик упадёт в тот же момент t_0, что и без стены. По горизонтали он за время

$t_0 - t_1$ пролетает назад то же расстояние, которое пролетел бы вперёд за стеной: $L_0 - L$. Иначе говоря, траектория после удара — зеркальное отражение относительно стены той части параболы, что лежала бы за стеной (рис. 3). Точка падения без стены отстоит от стены на $L_0 - L$ вперёд, её отражение — на $L_0 - L$ назад:

$$l = L - (L_0 - L) = 2L - L_0 = 2L - \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g} = 8\text{ м} - 5\text{ м} = 3\text{ м}.$$

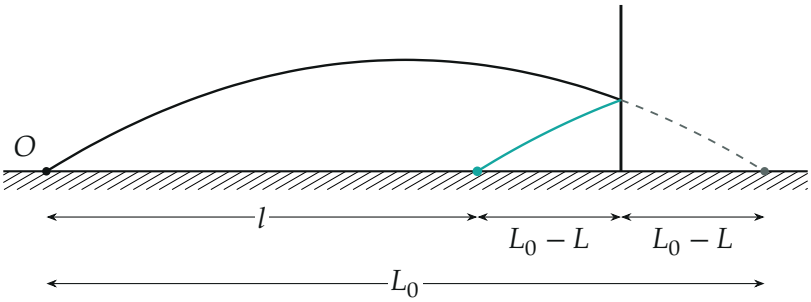


Рис. 3. Пунктир — полёт без стены (шарик упал бы на $L_0 = 5$ м). Бирюзовая дуга после удара — его зеркальное отражение в стене: шарик падает на $L_0 - L = 1$ м ближе стены, то есть на $l = 3$ м от места броска.

6. То же прямым счётом. Падение — при $y = 0$, то есть в момент $t_0 = 2V_0 \sin\alpha / g \approx 0{,}518$ с. До удара шарик пролетел L к стене, после удара летел назад время $t_0 - t_1$ со скоростью $V_0 \cos\alpha$:

$$l = L - V_0 \cos\alpha\,(t_0 - t_1) = L - (V_0 \cos\alpha\, t_0 - L) = 2L - L_0 = 3\text{ м}.$$

Получили ту же формулу. Горизонтальная координата шарика от времени показана на рис. 4: до удара растёт, после — с той же скоростью убывает.

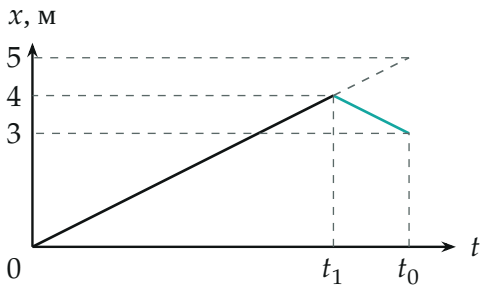


Рис. 4. Горизонтальная координата шарика: до удара ($t < t_1 \approx 0{,}41$ с) растёт, после — убывает с той же скоростью; в момент падения $t_0 \approx 0{,}52$ с $x = 3$ м. Пунктир — полёт без стены.

Обратите внимание. Сначала проверьте, что шарик вообще долетает до стены, не упав ($L_0 > L$), и что верхняя точка пройдена до удара ($x_H < L$); иначе формулы другие. Удар о стену не меняет времени полёта: время задаёт только вертикальное движение.

Ответ.

$$x_H = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{2g} = 2{,}5 \text{ м}, \qquad l = 2L - \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g} = 3 \text{ м}$$

Проверка. Размерность: $\dfrac{(\text{м/с})^2}{\text{м/с}^2} = \text{м}$. Предельный случай: если стену отодвинуть ровно до $L = L_0$, шарик коснётся её у самой земли, и формула даст $l = 2L_0 - L_0 = L_0$ — точка падения у стены, как и должно быть. Численная проверка (python): $t_1 = 0{,}414$ с, $t_0 = 0{,}518$ с, $l = 4 - 9{,}659 \cdot (0{,}518 - 0{,}414) = 3{,}00$ м.

Смысл: упругий удар о стену — зеркало для горизонтального движения; поэтому шарик падает на столько же ближе стены, на сколько дальше стены упал бы без неё.

Ответ. 1) $x_H = \dfrac{V_0^2 \sin 2\alpha}{2g} = 2{,}5$ м; 2) $l = 2L - \dfrac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g} = 3$ м.