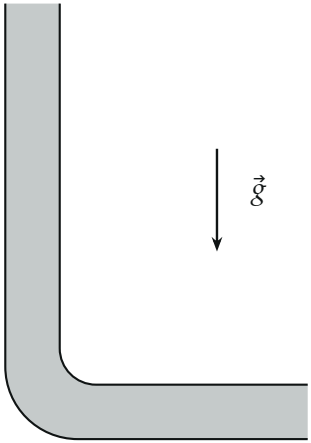
Ртуть в Г-образной трубке

Задача 5. [Физтех 2015/16, 9 класс, задача 5] Тонкая Г-образная трубка постоянного внутреннего сечения полностью заполнена ртутью (см. рис.). Горизонтальное колено трубки закрыто с одного конца и имеет длину $L = 150$ см. Вертикальное колено высотой $H = 10$ см открыто в атмосферу. Атмосферное давление $P_0 = 740$ мм рт. ст. Ртуть начинает выливаться, если трубку двигать вдоль горизонтального колена с постоянным ускорением, не меньшим чем a_0.

1. Найти давление (в мм рт. ст.) в середине горизонтального колена при движении с ускорением a_0.
2. Найти длину вылившегося слоя ртути при движении с ускорением $\frac{5}{4}a_0$.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Пока трубка покоится, давление в горизонтальном колене всюду одно: $P_0 + \rho g H$ — атмосфера плюс столбик ртути в вертикальном колене. Когда трубку разгоняют, ртуть в горизонтальном колене тоже должна разгоняться, а разогнать её может только разность давлений: сзади давление должно быть больше, чем спереди. Поэтому давление вдоль колена падает линейно в сторону ускорения. Если закрытый конец — впереди, давление у него уменьшается и при

некотором ускорении a_0 становится нулём: ртуть отрывается от закрытого конца, там образуется пустота (пары ртути не в счёт), и ртуть выливается из открытого колена. Задача на второй закон Ньютона для жидкости: давление в ускоренно движущейся жидкости.

Обозначения. ρ — плотность ртути, S — сечение трубки. Ось x — вдоль горизонтального колена от изгиба к закрытому концу; ускорение трубки $\vec{a}$ направлено по x (только так давление у закрытого конца уменьшается). $P(x)$ — давление в горизонтальном колене на расстоянии x от изгиба, $P_{\text{и}}$ — давление у изгиба. Давления удобно мерить в мм рт. ст.: давление $\rho g h$ столбика высотой h мм равно h мм рт. ст. Трубка тонкая: размером изгиба и толщиной трубки по сравнению с H и L пренебрегаем.

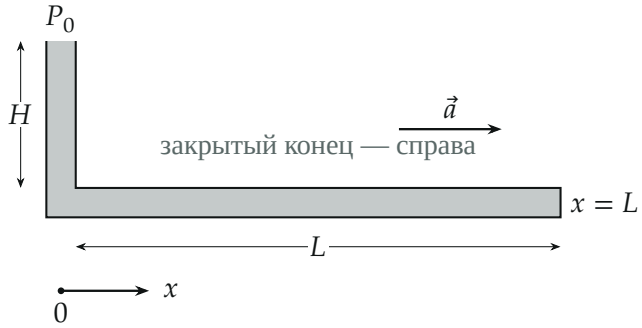


Рис. 1. Схема трубки: вертикальное колено высотой H открыто, горизонтальное колено длиной L закрыто справа. Ускорение направлено к закрытому концу, ось x — от изгиба.

1. Давление у изгиба. Вертикальное колено движется с горизонтальным ускорением, а по вертикали ртуть в нём покоится. Значит, давление по высоте меняется, как в покоящейся жидкости: внизу больше на вес столбика. У изгиба

$$P_{\text{и}} = P_0 + \rho g H = 740 + 100 = 840 \text{ мм рт. ст.}$$

($H = 10$ см $= 100$ мм, столбик ртути высотой 100 мм создаёт 100 мм рт. ст.)

2. Давление вдоль горизонтального колена. Выделим в горизонтальном колене столбик ртути от x до $x+\Delta x$, масса $\Delta m = \rho S\,\Delta x$ (рис. 2). По горизонтали на него действуют только силы давления: слева $P(x)S$ по оси x, справа $P(x+\Delta x)S$ против оси. Второй закон Ньютона для столбика в проекции на ось x:

$$\rho S\,\Delta x \cdot a = P(x)S - P(x+\Delta x)S \quad \Rightarrow \quad \frac{P(x+\Delta x) - P(x)}{\Delta x} = -\rho a.$$

Давление убывает вдоль x равномерно, с одним и тем же темпом ρa:

$$P(x) = P_{\text{и}} - \rho a x.$$

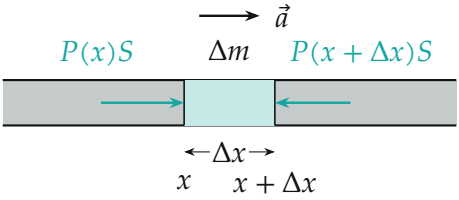


Рис. 2. Столбик ртути длиной Δx: ускорение $\vec{a}$ ему сообщает разность сил давления, поэтому сзади давление больше, чем спереди.

3. Критическое ускорение. Ртуть начинает выливаться, когда у закрытого конца давление падает до нуля — меньше нуля оно стать не может, ртуть отходит от стенки:

$$P(L) = P_{\text{и}} - \rho a_0 L = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{P_{\text{и}}}{\rho L} = \frac{840\text{ мм}}{1500\text{ мм}}\,g = 0{,}56\,g.$$

Пункт 1.

4. Давление в середине при $a = a_0$. Подставим $x = L/2$ и $\rho a_0 L = P_{\text{и}}$:

$$P\Big(\frac{L}{2}\Big) = P_{\text{и}} - \rho a_0 \frac{L}{2} = P_{\text{и}} - \frac{P_{\text{и}}}{2} = \frac{P_0 + \rho g H}{2} = \frac{840}{2} = 420\text{ мм рт. ст.}$$

Давление спадает линейно от 840 у изгиба до 0 у закрытого конца, в середине — ровно половина (рис. 3, верхняя прямая).

Пункт 2.

5. Ускорение $\frac{5}{4}a_0$. Теперь давление падает вдоль колена быстрее: $\rho a = \frac{5}{4}\rho a_0$. Ноль давления достигается раньше закрытого конца, на расстоянии l от изгиба; дальше — пустота (рис. 4). Часть ртути вылилась через открытое колено, но вертикальное колено по-прежнему заполнено до верха: ртуть переливается через край, пока не установится равновесие. Значит, давление у изгиба осталось $P_{\text{и}} = 840$ мм рт. ст., и

$$P(l) = P_{\text{и}} - \frac{5}{4}\rho a_0\, l = 0 \quad \Rightarrow \quad l = \frac{4}{5}\cdot\frac{P_{\text{и}}}{\rho a_0} = \frac{4}{5}L = 120 \text{ см}.$$

Ртуть занимает 120 см горизонтального колена, у закрытого конца — пустота длиной

$$\Delta L = L - l = \frac{L}{5} = 30 \text{ см}.$$

Сечение трубки постоянно, поэтому вылившийся слой ртути — столько же, сколько освободилось в колене: 30 см.

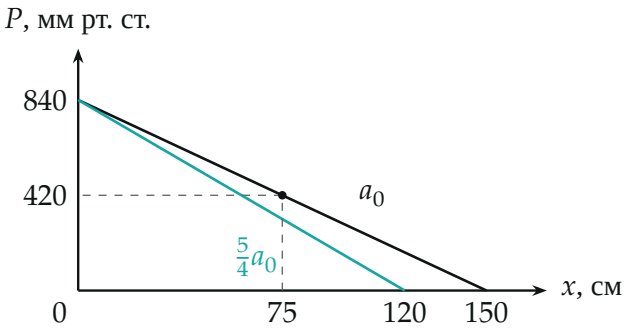


Рис. 3. Давление вдоль горизонтального колена: при a_0 (чёрная прямая) — от 840 у изгиба до 0 у закрытого конца, в середине 420; при $\frac{5}{4}a_0$ (бирюзовая) ноль достигается на $x = 120$ см.

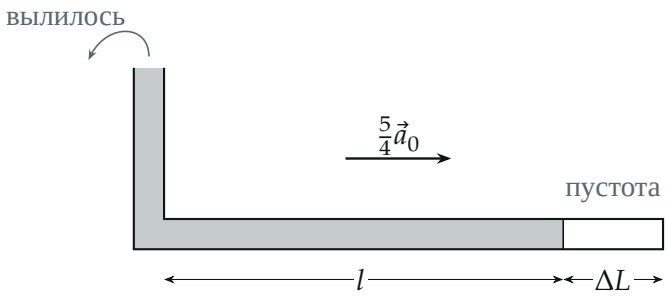


Рис. 4. Установившееся состояние при ускорении $\frac{5}{4}a_0$: вертикальное колено полное, в горизонтальном ртуть занимает длину $l = \frac{4}{5}L$, у закрытого конца — пустота $\Delta L = \frac{L}{5}$.

Обратите внимание. Давление у изгиба — не атмосферное, а $P_0 + \rho g H$: к атмосфере добавляется столбик ртути в вертикальном колене. И при $\frac{5}{4}a_0$ оно не меняется: вертикальное колено остаётся полным, ртуть выливается из горизонтального.

Ответ.

$$P\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{P_0 + \rho g H}{2} = 420 \text{ мм рт. ст.}, \qquad \Delta L = L - \frac{4}{5}L = \frac{L}{5} = 30 \text{ см}$$

Проверка. Размерность: $\rho a x$ — $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м} = \text{Па}$, как у давления. Предельный случай: при $a = 0$ формула $P(x) = P_{\text{и}} - \rho a x$ даёт одинаковое давление 840 мм рт. ст. по всему колену — как в покоящейся жидкости. Второй способ для пункта 2: при $a = a_0$ ноль давления — на длине L, а длина, на которой давление спадает до нуля, обратно пропорциональна ускорению: $l = L \cdot \frac{a_0}{\frac{5}{4}a_0} = \frac{4}{5}L$ — то же.

Смысл: в разгоняющейся трубке ртуть «отстаёт» и давит назад; давление у переднего закрытого конца падает тем сильнее, чем больше ускорение, а лишняя ртуть, которую давление уже не удерживает у конца, переливается через открытое колено.

Ответ. 1) $P = \frac{P_0 + \rho g H}{2} = 420$ мм рт. ст.; 2) $\Delta L = \frac{L}{5} = 30$ см.