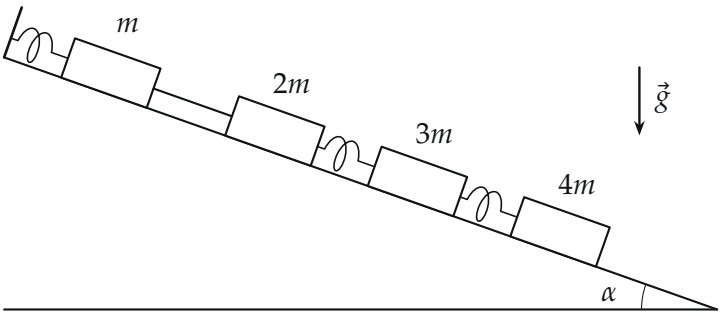
Бруски на пружинах и нить

Задача 2. [Физтех 2015/16, 9 класс, задача 2] Бруски с массами m, $2m$, $3m$ и $4m$, соединённые лёгкими пружинами и нитью (см. рис.), удерживаются неподвижно с помощью упора на гладкой наклонной поверхности с углом наклона к горизонту α ($\sin\alpha = 1/3$).

1. Найти силу натяжения нити.
2. Найти ускорение (направление и модуль) бруска с массой m сразу после пережигания нити.



▲ **Решение. Что происходит.** Пока система покоится, каждая связь держит всё, что висит ниже неё по склону: нить держит бруски $2m$, $3m$, $4m$ вместе с пружинами между ними, верхняя пружина — все четыре бруска. Пережигаем нить — натяжение нити исчезает мгновенно, а сила упругости пружины мгновенно измениться не может: для этого пружина должна заметно растянуться или сжаться, а брускам нужно время, чтобы сдвинуться. Класс задачи — «что меняется мгновенно»: нить — скачком, пружина — нет.

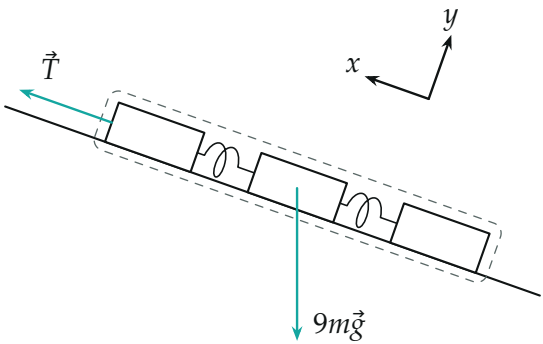
Обозначения. T — натяжение нити; F — сила упругости верхней пружины (между упором и бруском m); ось x — вдоль наклонной плоскости вверх; ось y — по нормали к плоскости. Плоскость гладкая — трения нет, и по оси x действуют только сила тяжести, нить и пружины.

Пункт 1. Натяжение нити.

1. Тело «бруски $2m$, $3m$, $4m$ с пружинами между ними». Выберем именно это тело: пружины между брусками станут внутренними сила-

ми и уйдут, останется одна неизвестная — натяжение нити. На тело действуют натяжение $\vec{T}$ (вверх по склону), сила тяжести $9m\vec{g}$, реакция плоскости. Тело покоится, условие равновесия в проекции на ось x (реакция перпендикулярна оси и в проекцию не входит):

$$0 = T - 9mg\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad T = 9mg\sin\alpha = 9mg\cdot\frac{1}{3} = 3mg.$$



Тело «три нижних бруска с пружинами» (обведено): вдоль склона его держит только нить, тянет вниз составляющая силы тяжести $9mg\sin\alpha$. Реакция плоскости перпендикулярна оси x и не показана.

Пункт 2. Ускорение бруска m.

2. Брусок m до пережигания. На него вдоль склона действуют: сила упругости верхней пружины F (пружина растянута, тянет брусок вверх — к упору), натяжение нити T (вниз по склону, к бруску $2m$) и составляющая силы тяжести $mg\sin\alpha$ (вниз). Условие равновесия в проекции на ось x:

$$0 = F - T - mg\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad F = T + mg\sin\alpha = 3mg + \frac{mg}{3} = \frac{10}{3}mg.$$

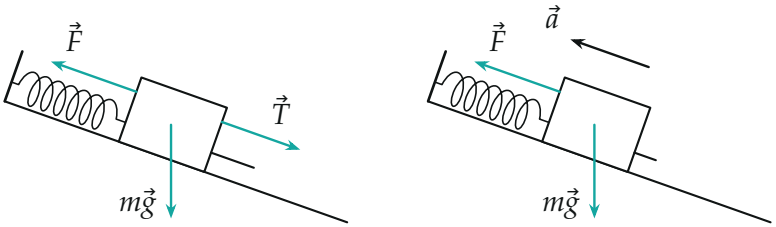
То же сразу из равновесия всех четырёх брусков: $F = 10mg\sin\alpha$.

3. Брусок m сразу после пережигания. Нить больше не тянет: T пропадает. Пружина за бесконечно малое время не успевает изменить длину, поэтому $F = \frac{10}{3}mg$ — как до пережигания. Второй закон Ньютона

для бруска m в проекции на ось x:

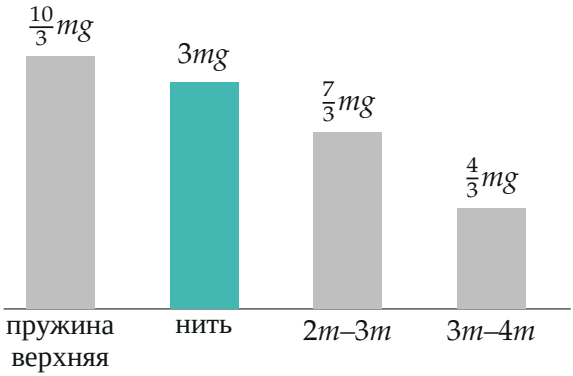
$$ma_x = F - mg\sin\alpha = T = 3mg \quad \Rightarrow \quad a_x = 3g.$$

Знак плюс: ускорение направлено вверх вдоль наклонной плоскости, к упору. Нескомпенсированной осталась ровно та сила, которая исчезла, — натяжение нити.



Брусок m до пережигания и сразу после: сила пружины F та же, натяжение нити T исчезло, появилось ускорение вверх по склону. Реакция плоскости не показана.

4. Силы во всех связях. Каждая связь держит то, что ниже неё: нижняя пружина — $4mg\sin\alpha$, средняя — $(3m+4m)g\sin\alpha$, нить — $9mg\sin\alpha$, верхняя пружина — $10mg\sin\alpha$.



Силы в связях в масштабе, сверху вниз по склону: каждая держит составляющую силы тяжести всех брусков ниже неё.

Обратите внимание. Сразу после пережигания брусок m ускоряется не вниз, а вверх, и с ускорением больше g. Ошибка — считать, что пружина «отпускает» вместе с нитью: она остаётся растянутой и тянет брусок к упору с прежней силой $\frac{10}{3}mg$.

Ответ (матрёшкой).

$$T = (2m + 3m + 4m)g\sin\alpha = 3mg, \qquad a = \frac{F - mg\sin\alpha}{m} = \frac{T}{m} = 3g$$

— вверх вдоль склона.

Проверка. Размерность: T — сила (mg), a — ускорение (g). Второй способ для F: равновесие всех четырёх брусков сразу даёт $F = 10mg\sin\alpha$, а не через нить — совпало. Предел: если бы нижних брусков не было ($T = 0$), брусок m после пережигания остался бы в покое, $a = T/m = 0$ — верно.

Смысл: в первый миг после пережигания ускорение бруска определяет только исчезнувшая сила нити, всё остальное не успело измениться.

Ответ. 1) $T = 9mg\sin\alpha = 3mg$; 2) $a = 3g$, направлено вверх вдоль наклонной плоскости.