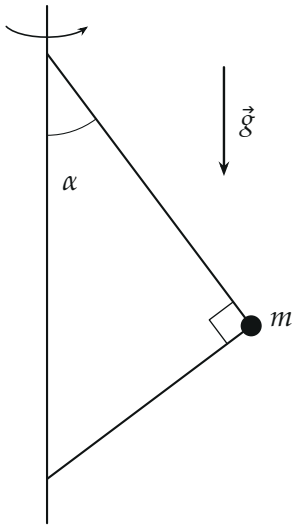
Шарик на двух нитях при вращении

Задача 3. [Физтех 2015/16, 9 класс, задача 3] Небольшой по размерам шарик массой m движется по окружности в горизонтальной плоскости, находясь от вертикальной оси вращения на расстоянии R. Шарик удерживается двумя нитями, угол между которыми 90° (см. рис.). Верхняя нить составляет с осью вращения угол α ($\cos\alpha = 4/5$). Сила натяжения верхней нити в 3 раза больше, чем нижней.

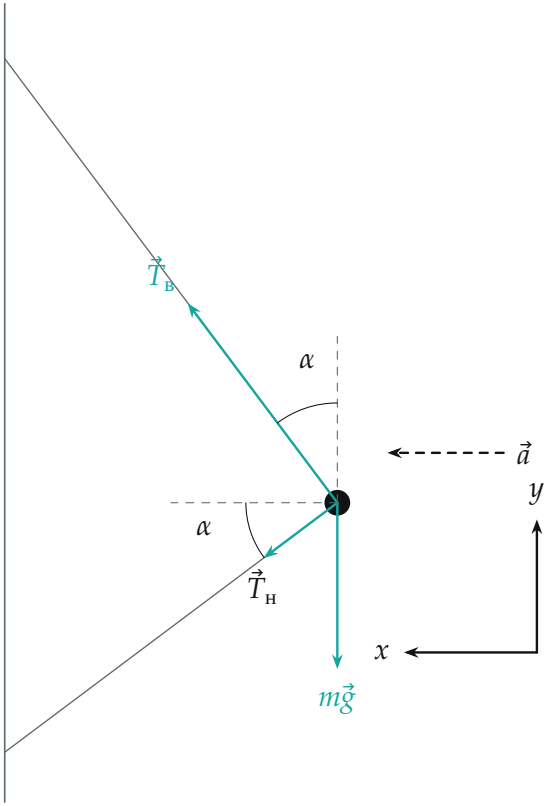
1. Найти силу натяжения верхней нити.
2. Найти угловую скорость вращения.



▲ **Решение. Что происходит.** Шарик равномерно движется по горизонтальной окружности радиуса R, поэтому его ускорение — центростремительное, горизонтальное, направлено к оси, а по вертикали ускорения нет. Это задача на движение по окружности: второй закон Ньютона в проекциях на вертикаль (равновесие) и на горизонталь (центростремительное ускорение). Обе нити тянут шарик к оси: верхняя — вверх и к оси, нижняя — вниз и к оси.

Обозначения. $T_\text{в}$ и $T_\text{н} = T_\text{в}/3$ — натяжения верхней и нижней нитей; $\sin\alpha = \sqrt{1-(4/5)^2} = 3/5$. Нижняя нить перпендикулярна верхней,

поэтому она составляет с осью угол $90° - \alpha$, а с горизонталью — угол α. Ось x — горизонтально к оси вращения, y — вертикально вверх.



Силы, действующие на шарик, в масштабе: $T_в = \frac{5}{3}mg$, $T_н = \frac{5}{9}mg$; верхняя нить отклонена от вертикали на α, нижняя — от горизонтали на α. Ускорение — к оси.

Пункт 1. Натяжение верхней нити.

1. Второй закон Ньютона по вертикали. Запишем $m\vec{a} = \vec{T}_в + \vec{T}_н + m\vec{g}$ в проекции на ось y. Начнём с неё: ускорение по вертикали равно нулю, поэтому неизвестная угловая скорость сюда не войдёт. Верхняя нить даёт $+T_в \cos\alpha$, нижняя $-T_н \sin\alpha$ (она тянет вниз):

$$0 = T_в \cos\alpha - T_н \sin\alpha - mg.$$

Подставим $T_н = T_в/3$:

$$T_в\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\right) = mg \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{5}T_в = mg \quad \Rightarrow \quad T_в = \frac{5}{3}mg,$$

и натяжение нижней нити $T_н = \frac{5}{9}mg$.

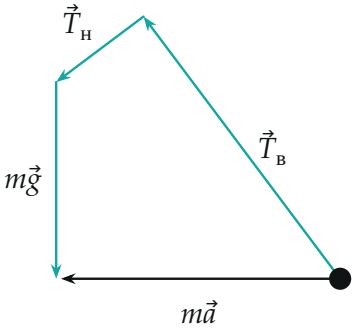
Пункт 2. Угловая скорость.

2. Второй закон Ньютона по горизонтали. Центростремительное ускорение $a = \omega^2 R$ направлено к оси, по оси x. Обе нити тянут к оси: верхняя — $T_в \sin\alpha$, нижняя — $T_н \cos\alpha$:

$$m\omega^2 R = T_в \sin\alpha + T_н \cos\alpha = \frac{5}{3}mg\cdot\frac{3}{5} + \frac{5}{9}mg\cdot\frac{4}{5} = mg + \frac{4}{9}mg = \frac{13}{9}mg.$$

Отсюда

$$\omega = \sqrt{\frac{13g}{9R}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{13g}{R}}.$$

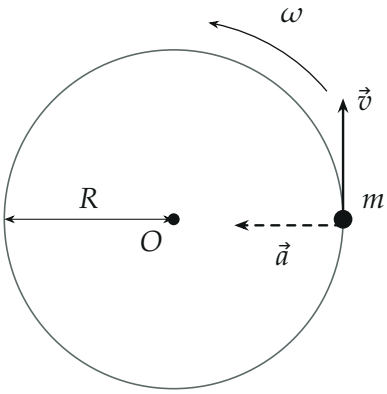


Многоугольник сил в масштабе: $\vec{T}_в + \vec{T}_н + m\vec{g}$ замыкается горизонтальным вектором $m\vec{a}$ длиной $\frac{13}{9}mg$.

3. Второй способ — проекции на нити. Нити взаимно перпендикулярны, поэтому в проекции на направление одной нити натяжение другой не входит. Вдоль верхней нити (к точке подвеса) проекция ускорения $\omega^2 R\sin\alpha$, вдоль нижней — $\omega^2 R\cos\alpha$; сила тяжести даёт $-mg\cos\alpha$ и $+mg\sin\alpha$:

$$T_в - mg\cos\alpha = m\omega^2 R\sin\alpha, \qquad T_н + mg\sin\alpha = m\omega^2 R\cos\alpha.$$

С $T_в = 3T_н$: $\frac{4}{5}mg + \frac{3}{5}m\omega^2 R = 3\left(\frac{4}{5}m\omega^2 R - \frac{3}{5}mg\right)$, откуда $m\omega^2 R = \frac{13}{9}mg$ и $T_в = \frac{4}{5}mg + \frac{3}{5}\cdot\frac{13}{9}mg = \frac{5}{3}mg$ — то же.



Вид сверху: шарик движется по окружности радиуса R вокруг оси O; ускорение $\omega^2 R$ направлено к центру.

Обратите внимание. Нижняя нить не помогает держать шарик по вертикали, а мешает: её вертикальная составляющая направлена вниз, поэтому верхней нити приходится держать больше, чем $mg/\cos\alpha$. Зато по горизонтали обе нити работают вместе.

Ответ (матрёшкой).

$$T_в = \frac{mg}{\cos\alpha - \frac{1}{3}\sin\alpha} = \frac{5}{3}mg, \qquad \omega = \sqrt{\frac{T_в \sin\alpha + \frac{1}{3}T_в\cos\alpha}{mR}} = \sqrt{\frac{13g}{9R}}.$$

Проверка. Размерность: $[g/R] = \text{с}^{-2}$, корень — с^{-1}. Два способа (проекции на вертикаль и горизонталь; проекции на нити) дали одно и то же. Предел: без нижней нити ($T_н = 0$) получили бы конический маятник: $T_в = mg/\cos\alpha$ и $\omega^2 R = g\tan\alpha$ — обе формулы следуют из наших уравнений при $T_н = 0$.

Смысл: натяжения нитей и угловая скорость полностью определены тем, что шарик по вертикали в равновесии, а по горизонтали движется по окружности.

Ответ. 1) $T_{\text{в}} = \dfrac{5}{3}mg$; 2) $\omega = \sqrt{\dfrac{13g}{9R}}$.