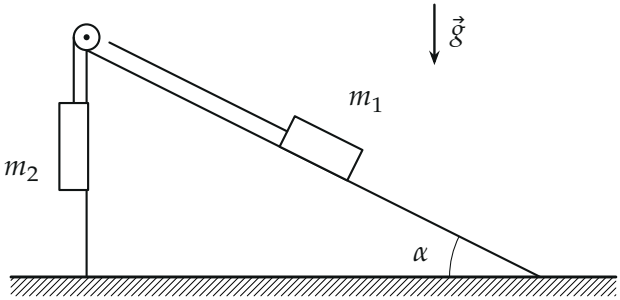
# Клин с блоком и грузами

**Задача 4.** [Физтех 2015/16, 9 класс, задача 4] Клин массой $m$ находится на шероховатой горизонтальной поверхности стола (см. рис.). Через блок, укреплённый на вершине клина, перекинута лёгкая нерастяжимая нить, связывающая грузы, массы которых $m_1 = 2m$ и $m_2 = 3m$. Грузы удерживают, затем отпускают. После этого грузы движутся, а клин покоится. Гладкая наклонная поверхность клина образует с горизонтом угол $\alpha$ ($\sin\alpha = 0{,}6$).

1. Найдите ускорение грузов.
2. Найдите силу нормальной реакции, действующую на клин со стороны стола.



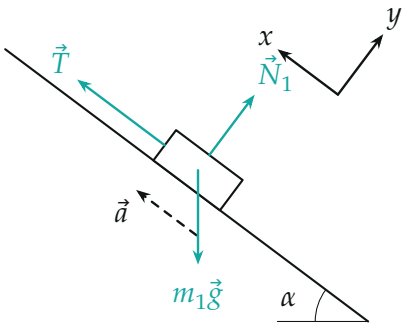

▲ **Решение. Что происходит.** Клин покоится, поэтому грузы движутся как по неподвижной горке. Сначала — задача о связанных телах: второй закон Ньютона для каждого груза. Заранее выясним, кто перетягивает: сила тяжести груза $m_2$, равная $3mg$, больше составляющей силы тяжести груза $m_1$ вдоль склона $m_1 g \sin\alpha = 1{,}2\,mg$. Значит, груз $m_2$ опускается, а груз $m_1$ едет вверх по склону. Затем — равновесие клина по вертикали: стол давит на клин с силой, равной весу клина плюс давлению на него груза и нити через блок.

**Обозначения.** $\cos\alpha = \sqrt{1 - 0{,}6^2} = 0{,}8$. $T$ — натяжение нити, одинаковое по обе стороны блока (нить лёгкая, массой и трением блока пренебрегаем); $a$ — модуль ускорения грузов (нить нерастяжима, он у них общий); $N_1$ — сила реакции склона на груз $m_1$; $N$ — искомая нормальная реакция стола на клин.

**Пункт 1. Ускорение грузов.**

**1. Груз $m_1$.** Оси: $x$ — вдоль склона вверх (по ускорению), $y$ — по нормали к склону (по ней ускорения нет, из этой проекции найдём $N_1$). Второй закон Ньютона $m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T}$ в проекциях:

$$x:\ 2m\,a = T - 2mg\sin\alpha, \qquad y:\ 0 = N_1 - 2mg\cos\alpha.$$




*Груз $m_1$: сила тяжести, реакция гладкого склона и натяжение нити вдоль склона к блоку; ось $x$ — по ускорению, вверх по склону. Угол здесь настоящий,* $\sin\alpha = 0{,}6$.

**2. Груз $m_2$.** Он движется вниз с тем же по модулю ускорением. Второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось вниз:

$$3m\,a = 3mg - T.$$

**3. Ускорение.** Сложим уравнения шагов 1 и 2 — натяжение уйдёт:

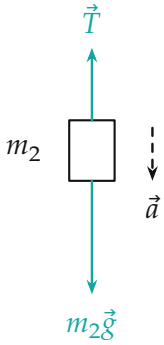
$$5m\,a = 3mg - 2mg\sin\alpha \quad\Rightarrow\quad a = \frac{3 - 2\sin\alpha}{5}\,g,$$

$$a = \frac{3 - 1{,}2}{5}\,g = \frac{9}{25}\,g = 0{,}36\,g.$$

Знак плюс подтверждает выбранное направление: груз $m_2$ опускается, груз $m_1$ поднимается по склону. Натяжение и реакция склона, нужные

для клина:

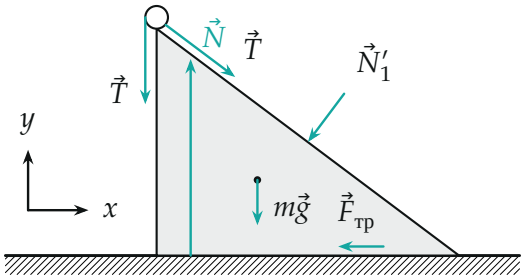
$$T = 3m(g - a) = \frac{48}{25}\,mg = 1{,}92\,mg, \qquad N_1 = 2mg\cos\alpha = 1{,}6\,mg.$$




*Груз $m_2$: сила тяжести $3mg$ больше натяжения $1{,}92\,mg$, ускорение вниз.*

**Пункт 2. Нормальная реакция стола.**

**4. Силы на клин вместе с блоком.** Рассматриваем клин и блок как одно тело, тогда сила оси блока — внутренняя, а нить действует на тело через блок. Внешние силы: $m\vec{g}$; сила давления груза $m_1$ на склон $\vec{N}_1'$ — по третьему закону Ньютона равна $N_1$ и направлена в клин по нормали к склону; две силы натяжения на блок, обе по $T$: вдоль склона вниз (к грузу $m_1$) и вертикально вниз (к грузу $m_2$); со стороны стола — реакция $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$.




*Клин с блоком: давление груза $m_1$, два натяжения на блок, тяжесть, реакция и трение стола. Стрелки примерно в масштабе, кроме силы трения (она $0{,}576\,mg$ и для ответа не нужна).*

**5. Равновесие клина по вертикали.** Ось $y$ — вверх. Нормаль склона, направленная в клин, имеет проекции $(-\sin\alpha, -\cos\alpha)$, направление вниз по склону — $(\cos\alpha, -\sin\alpha)$. Нужна только $N$, поэтому берём проекцию на $y$ — в неё не входит сила трения. Условие равновесия клина $\sum \vec{F} = 0$:

$$y:\ N - mg - N_1\cos\alpha - T\sin\alpha - T = 0$$

$$\Rightarrow \quad N = mg + N_1\cos\alpha + T(1+\sin\alpha).$$

Подставим:

$$N = mg + 1{,}6\cdot 0{,}8\,mg + 1{,}92\cdot 1{,}6\,mg = (1 + 1{,}28 + 3{,}072)\,mg,$$

$$N = 5{,}352\,mg = \frac{669}{125}\,mg.$$

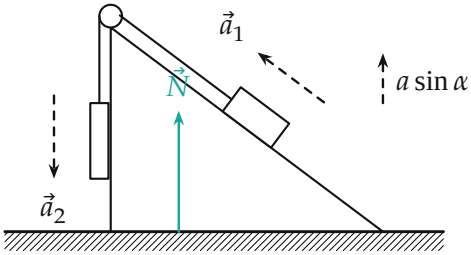
Больше всего стол нагружает нить: блок тянут вниз обе её ветви.

**6. Второй способ — система «клин + блок + грузы».** Внутренние силы (натяжение, давление на склон) уходят; внешние вертикальные — силы тяжести всех тел $(m + 2m + 3m)g = 6mg$ и $N$. По второму закону Ньютона для системы сумма внешних сил равна сумме $m_i\vec{a}_i$. В проекции на вертикаль: у груза $m_1$ ускорение $a\sin\alpha$ вверх, у груза $m_2$ — $a$ вниз, клин покоится:

$$N - 6mg = 2m\cdot a\sin\alpha - 3m\cdot a = (2\cdot 0{,}6 - 3)\cdot 0{,}36\,mg = -0{,}648\,mg,$$

$$N = 6mg - 0{,}648\,mg = 5{,}352\,mg.$$

Совпало. Стол давит меньше полного веса $6mg$: центр масс системы ускоряется вниз.




*Вся система: ускорения есть только у грузов. Груз $m_2$ разгоняется вниз сильнее, чем груз $m_1$ поднимается (вертикальная составляющая $a\sin\alpha$), — поэтому $N < 6mg$.*

**Обратите внимание.** Нормальная реакция не равна весу системы $6mg$: грузы движутся с ускорением. И на клин действуют не только давление груза, но и обе ветви нити через блок — без них получилось бы $N = 2{,}28\,mg$.

**Ответ (матрёшкой).**

$$a = \frac{m_2 - m_1\sin\alpha}{m_1 + m_2}\,g = \frac{9}{25}\,g,$$

$$N = mg + m_1 g\cos^2\alpha + m_2(g-a)(1+\sin\alpha) = \frac{669}{125}\,mg \approx 5{,}35\,mg.$$

**Проверка.** Размерность: $a$ — доля $g$, $N$ — доля $mg$. Предел: если бы грузы не двигались ($a = 0$), второй способ дал бы $N = 6mg$ — полный вес системы; так и должно быть. Два способа (шаги 5 и 6) дали одно и то же.

Смысл: стол «чувствует» не только вес клина и грузов, но и ускорение грузов: опускающийся тяжёлый груз частично «разгружает» стол.

**Ответ.** 1) $a = \dfrac{9}{25}\,g$ (груз $m_2$ опускается, груз $m_1$ поднимается по клину); 2) $N = \dfrac{669}{125}\,mg = 5\dfrac{44}{125}\,mg$.