Вода в U-образной трубке при ускорении

Задача 5. [Физтех 2015/16, 9 класс, задача 5] Тонкая U-образная трубка постоянного внутреннего сечения с горизонтальным коленом длиной L и двумя одинаковыми вертикальными коленами, открытыми в атмосферу, заполнена водой не полностью (см. рис.). В каждом вертикальном колене остаётся слой воздуха длиной H. Вода начинает выливаться, если трубку двигать вдоль горизонтального колена с постоянным ускорением, не меньшим, чем некоторая величина a_0. Горизонтальное колено остаётся всегда заполненным водой.

1. Найти ускорение a_0.
2. Найти длину вылившегося слоя воды при движении с ускорением $\frac{4a_0}{3}$.

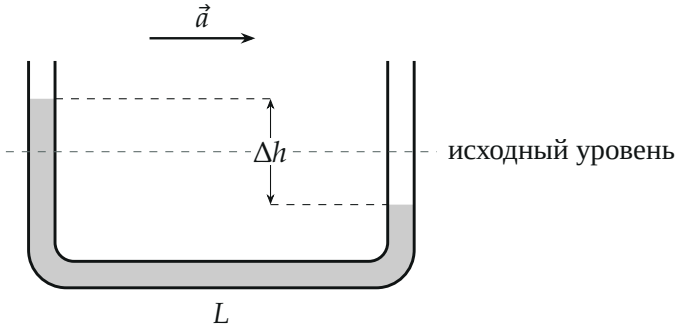


▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на гидростатику в ускоренно движущемся сосуде. Пока трубка покоится, уровни воды в коленах одинаковы. Когда трубку разгоняют, воду в горизонтальном колене надо разгонять вместе с трубкой, а толкать её может только разность давлений на её концах. Эту разность создаёт разница уровней воды в вертикальных коленах: в заднем колене вода поднимается, в переднем опускается. Чем больше ускорение, тем больше разница уровней; когда вода в заднем колене дойдёт до края, она начнёт выливаться.

Обозначения. S — сечение трубки, ρ — плотность воды, p_0 — атмосферное давление, a — ускорение трубки (вправо), Δh — разность уровней воды в заднем (левом) и переднем (правом) коленах, l — длина вылившегося слоя воды.

Пункт 1.

1. Вода в вертикальных коленах. Вертикальные столбы воды по вертикали не ускоряются (уровни уже установились), поэтому вдоль вертикали давление в них растёт с глубиной как в покое; горизонтальное ускорение на это не влияет. Внизу заднего колена, на глубине h_1 под уровнем, давление $p_1 = p_0 + \rho g h_1$; внизу переднего, на глубине h_2, — $p_2 = p_0 + \rho g h_2$.

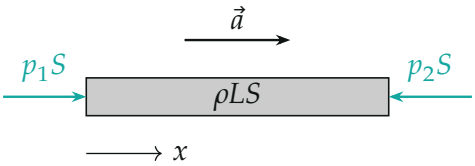


Трубка движется с ускорением $\vec{a}$ вправо: в заднем колене вода поднялась, в переднем опустилась на столько же.

2. Вода в горизонтальном колене. Столб воды длиной L, массой ρLS движется с ускорением a. По горизонтали на него действуют только силы давления на торцы: $p_1 S$ вперёд (сзади) и $p_2 S$ назад (спереди). Второй закон Ньютона в проекции на ось x по ускорению:

$$\rho LS\, a = p_1 S - p_2 S = \rho g\,(h_1 - h_2)\,S = \rho g\,\Delta h\,S \quad \Rightarrow \quad \Delta h = \frac{aL}{g}.$$

Разность уровней прямо пропорциональна ускорению.



Вода горизонтального колена: разгоняет её разность сил давления на торцы, $p_1 > p_2$.

3. Насколько поднимается вода сзади. Вода несжимаема, трубка постоянного сечения: сколько воды ушло из переднего колена, столько пришло в заднее. Значит, сзади уровень поднялся на $\dfrac{\Delta h}{2}$, спереди опустился на $\dfrac{\Delta h}{2}$ (рис. выше).

4. Начало выливания. До края заднего колена воде остаётся подняться на H. Вода начнёт выливаться, когда $\dfrac{\Delta h}{2} = H$:

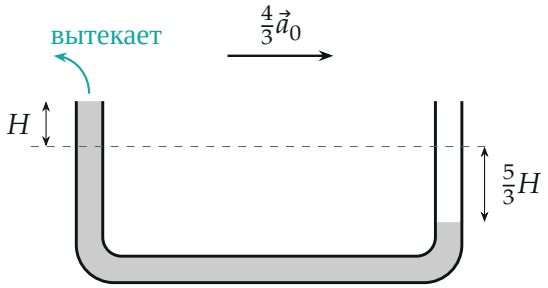
$$\frac{a_0 L}{2g} = H \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{2gH}{L}.$$

Пункт 2.

5. Уровни при $a = \frac{4}{3}a_0$. По шагу 2 нужна разность уровней

$$\Delta h = \frac{aL}{g} = \frac{4}{3} \cdot \frac{2gH}{L} \cdot \frac{L}{g} = \frac{8}{3}H.$$

Сзади вода выше исходного уровня быть не может больше, чем на H: выше — край трубки, лишнее выливается. Значит, сзади уровень на H выше исходного (у самого края), а спереди — на $\dfrac{8}{3}H - H = \dfrac{5}{3}H$ ниже исходного.



При ускорении $\frac{4}{3}a_0$: сзади вода у края трубки, спереди — на $\frac{5}{3}H$ ниже исходного уровня; разность уровней $\frac{8}{3}H$.

6. Сколько вылилось. Сравним объём воды с исходным (в единицах длины столба при сечении S): сзади прибавилось H, спереди убыло $\frac{5}{3}H$. Убыль, которая не перешла в заднее колено, вылилась:

$$l = \frac{5}{3}H - H = \frac{2}{3}H.$$

Обратите внимание. Пока вода не выливается, уровни меняются симметрично ($\pm\frac{\Delta h}{2}$). После начала выливания симметрия пропадает: задний уровень упёрся в край, и вся прибавка Δh идёт на опускание переднего уровня. И условие, что горизонтальное колено остаётся заполненным, нужно: иначе разность давлений создавалась бы не так.

Ответ.

$$\boxed{a_0 = \frac{2gH}{L}; \qquad l = \frac{2}{3}H}$$

Проверка. Размерность: $\frac{gH}{L}$ — ускорение; l — длина. Предел: при $a = a_0$ формула шага 6 даёт $\Delta h = 2H$, $l = 2H - H - H = 0$ — выливание только начинается. Второй способ для шага 2: в системе трубки на воду действует сила инерции $-m\vec{a}$, «эффективная тяжесть» $\vec{g} - \vec{a}$ отклонена назад, и свободные поверхности в двух коленах лежат на одной наклонной прямой с уклоном $\frac{a}{g}$; на длине L это и даёт $\Delta h = \frac{aL}{g}$.

Смысл: ускорение «наклоняет» воду в трубке, и наклон определяется только отношением a/g.

Ответ. 1) $a_0 = \frac{2gH}{L}$; 2) $l = \frac{2}{3}H$.