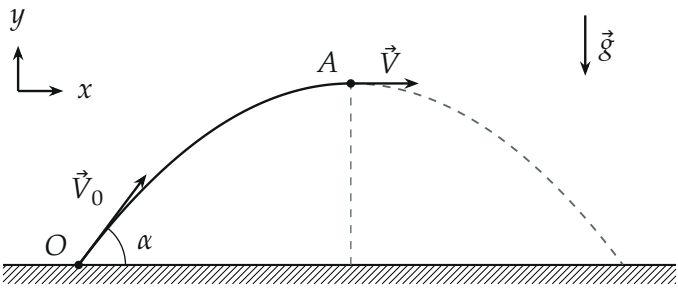
Камень в верхней точке

Задача 1. [Физтех 2015/16, 9 класс, задача 1] Камень брошен с поверхности Земли под углом к горизонту со скоростью $V_0 = 10$ м/с. В верхней точке траектории скорость камня оказалась $V = 6$ м/с. Сопротивление воздуха не учитывать. Принять ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

1. Найти вертикальную составляющую скорости камня при броске.
2. Найти время полёта камня до верхней точки траектории.



Поясняющий рисунок. O — точка броска, A — верхняя точка траектории: скорость $\vec{V}$ в ней горизонтальна. Серый пунктир — полёт после верхней точки.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Камень летит по параболе. По горизонтали его ничто не разгоняет и не тормозит, по вертикали сила тяжести каждую секунду отнимает у скорости подъёма 10 м/с. В верхней точке подниматься камень перестал, а вдоль горизонтали летит по-прежнему — поэтому скорость там не ноль, а $V = 6$ м/с. Главная фраза условия — «в верхней точке скорость оказалась V»: это и есть горизонтальная скорость камня за весь полёт. Задача на тело, брошенное под углом к горизонту: вектор скорости $\vec{v} = \vec{V}_0 + \vec{g}\,t$ и его проекции, горизонталь и вертикаль по отдельности.

Обозначения. Камень считаем материальной точкой. Начало координат — в точке броска O, ось x горизонтальна и направлена в сторону полёта, ось y — вертикально вверх, время t отсчитываем от броска (рисунок к условию). V_{0x} и V_{0y} — проекции начальной скорости $\vec{V}_0$ на

эти оси (в условии V_{0y} названа вертикальной составляющей), α — угол броска, A — верхняя точка, t_1 — момент, когда камень в ней.

Пункт 1.

1. Закон изменения скорости. В полёте на камень действует только сила тяжести (сопротивление воздуха не учитываем). Второй закон Ньютона для камня: $m\vec{a} = m\vec{g}$, то есть $\vec{a} = \vec{g}$ — ускорение постоянно и направлено вниз. При постоянном ускорении скорость меняется по закону

$$\vec{v} = \vec{V}_0 + \vec{g}\,t.$$

Спроектируем на оси. Оси выбраны так, чтобы у $\vec{g}$ была только одна ненулевая проекция: $g_x = 0, g_y = -g$. Получаем

$$x: \quad v_x = V_{0x}, \qquad\qquad y: \quad v_y = V_{0y} - gt.$$

Горизонтальная проекция скорости не меняется, вертикальная убывает на g за каждую секунду (рис. 1).

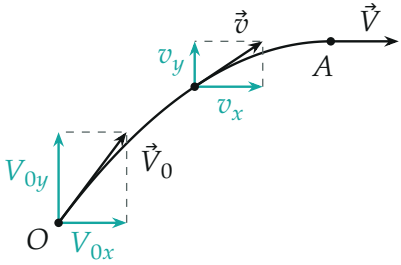


Рис. 1. Скорость камня в трёх точках подъёма. Горизонтальная проекция (стрелка вправо) везде одна и та же, вертикальная уменьшается и в точке A обращается в ноль: там вся скорость $\vec{V}$ горизонтальна.

2. Что известно о верхней точке. Верхняя точка — та, где камень перестал подниматься и ещё не начал опускаться: $v_y = 0$. Значит, вся скорость в точке A — это горизонтальная проекция: $V = v_x$. А она по шагу 1 не меняется, поэтому

$$V_{0x} = V = 6 \text{ м/с}.$$

3. Вертикальная составляющая при броске. Вектор $\vec{V}_0$ — гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами V_{0x} и V_{0y} (рис. 2): оси x и y перпендикулярны. По теореме Пифагора $V_0^2 = V_{0x}^2 + V_{0y}^2$, откуда

$$V_{0y} = \sqrt{V_0^2 - V^2} = \sqrt{10^2 - 6^2}\ \text{м/с} = \sqrt{64}\ \text{м/с} = 8\ \text{м/с}.$$

Знак «плюс» перед корнем: камень брошен вверх, проекция на ось y положительна. Получился треугольник со сторонами 6, 8, 10 — увеличенный вдвое «египетский» 3, 4, 5.

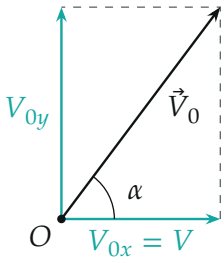


Рис. 2. Начальная скорость и её проекции: $V_0 = 10$ м/с — гипотенуза, $V_{0x} = V = 6$ м/с и $V_{0y} = 8$ м/с — катеты.

То же через угол броска: $V_{0x} = V_0 \cos\alpha$, поэтому $\cos\alpha = V/V_0 = 0{,}6$, $\sin\alpha = \sqrt{1 - 0{,}6^2} = 0{,}8$ и $V_{0y} = V_0 \sin\alpha = 10 \cdot 0{,}8 = 8$ м/с. Сам угол $\alpha \approx 53°$ для ответа не нужен.

Пункт 2.

4. Время подъёма. Неизвестным осталось только t_1. Вертикальная проекция скорости из шага 1: $v_y = V_{0y} - gt$. В верхней точке она равна нулю:

$$V_{0y} - gt_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{V_{0y}}{g} = \frac{\sqrt{V_0^2 - V^2}}{g} = \frac{8\ \text{м/с}}{10\ \text{м/с}^2} = 0{,}8\ \text{с}.$$

Смысл простой: сила тяжести отнимает у скорости подъёма 10 м/с за секунду, а отнять нужно 8 м/с. На графике (рис. 3) это точка, где прямая $v_y(t)$ пересекает ось времени.

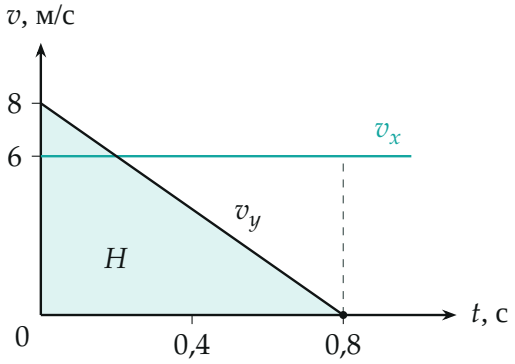


Рис. 3. Проекции скорости от времени: $v_x = 6$ м/с не меняется, v_y убывает от 8 м/с до нуля за $t_1 = 0{,}8$ с. Площадь закрашенного треугольника — высота подъёма H.

Обратите внимание. В верхней точке скорость не равна нулю: нулю равна только её вертикальная проекция. И складывать проекции нужно по теореме Пифагора: $V_{0y} = V_0 - V = 4$ м/с — ошибка: так вычитают числа, а скорость — вектор, и его перпендикулярные проекции связаны с модулем теоремой Пифагора.

Ответ.

$$V_{0y} = \sqrt{V_0^2 - V^2} = 8 \text{ м/с}, \qquad t_1 = \frac{\sqrt{V_0^2 - V^2}}{g} = 0{,}8 \text{ с}$$

Проверка. Размерность: $\sqrt{(\text{м/с})^2} = \text{м/с}$ и $(\text{м/с})/(\text{м/с}^2) = \text{с}$. Предельные случаи: если $V = V_0$, камень брошен горизонтально, $V_{0y} = 0$ и $t_1 = 0$ — подниматься некуда; если $V = 0$, камень брошен вертикально вверх, $V_{0y} = V_0$ и $t_1 = V_0/g$ — известная формула.

Второй способ — через высоту подъёма. Площадь под графиком $v_y(t)$ на рис. 3 — это перемещение по вертикали, то есть высота верхней точки: $H = \frac{1}{2} V_{0y} t_1 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 0{,}8$ м $= 3{,}2$ м. С другой стороны, по закону сохранения механической энергии камня (работает только сила тяжести)

между точками O и A:

$$\frac{mV_0^2}{2} = \frac{mV^2}{2} + mgH \quad \Rightarrow \quad H = \frac{V_0^2 - V^2}{2g} = \frac{100 - 36}{20}\ \text{м} = 3{,}2\ \text{м}.$$

Обе высоты совпали. Заодно видно, где камень окажется в верхней точке: по горизонтали он за это время улетит на $Vt_1 = 6 \cdot 0{,}8\ \text{м} = 4{,}8\ \text{м}$ от точки броска.

Смысл: скорость в верхней точке — это горизонтальная часть начальной скорости, всё остальное в V_0 «ушло» в подъём. Зная обе, вертикальную часть находят без угла броска, а время подъёма — одним делением на g.

Ответ. 1) $V_{0y} = \sqrt{V_0^2 - V^2} = 8$ м/с; 2) $t_1 = \dfrac{\sqrt{V_0^2 - V^2}}{g} = 0{,}8$ с.