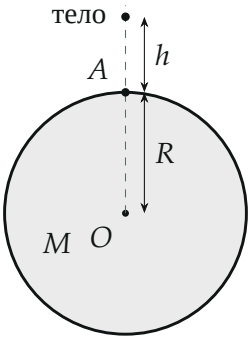
Высота, где g меньше

Задача 2. [Физтех 2015/16, 9 класс, задача 2] На какой высоте, считая от поверхности Земли, ускорение свободного падения на 19% меньше, чем на поверхности Земли? Радиус Земли равен R.



Поясняющий рисунок: Земля массой M и радиусом R, точка A на поверхности и тело на высоте h.

▲ **Решение. Что происходит.** Ускорение свободного падения создаёт сила тяготения Земли. По закону всемирного тяготения она убывает обратно пропорционально квадрату расстояния до центра Земли. Значит, задача сводится к одному вопросу: во сколько раз надо увеличить расстояние до центра, чтобы g стало равно 0,81 от значения у поверхности.

Обозначения. M — масса Земли, G — гравитационная постоянная, g_0 — ускорение свободного падения у поверхности, g — на высоте h; $r = R + h$ — расстояние от тела на высоте h до центра Земли O.

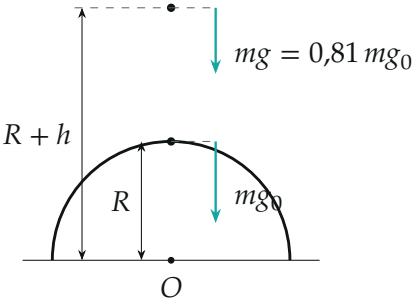
1. Ускорение у поверхности. Землю считаем шаром со сферически симметричным распределением массы, тогда она притягивает как точка массы M в центре. Второй закон Ньютона для тела массой m в точке A, на которое действует только сила тяготения:

$$mg_0 = G\frac{Mm}{R^2} \quad \Rightarrow \quad g_0 = G\frac{M}{R^2}.$$

Вращение Земли не учитываем: условие говорит о g как о величине, определяемой только тяготением.

2. Ускорение на высоте h. То же для тела на расстоянии $R + h$ от центра:

$$g = G\frac{M}{(R+h)^2}.$$



Сила тяготения у поверхности и на высоте h; стрелки — в масштабе $1 : 0{,}81$.

3. Отношение ускорений. Поделим второе равенство на первое — масса Земли и G сократятся, это и есть причина работать с отношением:

$$\frac{g}{g_0} = \frac{R^2}{(R+h)^2}.$$

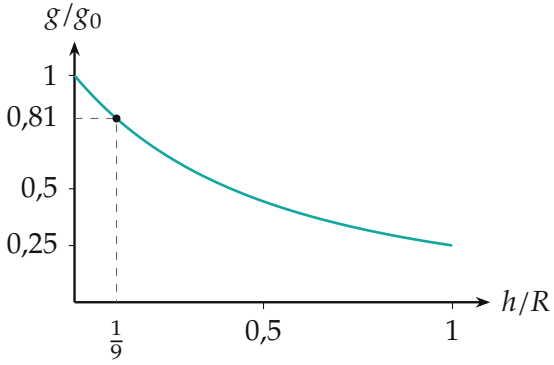
По условию g на 19% меньше g_0, то есть $g/g_0 = 1 - 0{,}19 = 0{,}81$:

$$\left(\frac{R}{R+h}\right)^2 = 0{,}81 \quad \Rightarrow \quad \frac{R}{R+h} = 0{,}9 = \frac{9}{10}.$$

Корень берём положительный: обе длины положительны.

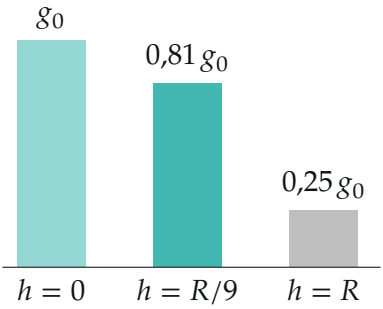
4. Высота. Отсюда $R + h = \dfrac{10}{9}R$, и

$$h = \frac{10}{9}R - R = \frac{R}{9}.$$



Зависимость $g/g_0 = 1/(1 + h/R)^2$ по вычисленным точкам; уровню 0,81 отвечает $h = R/9$.

Обратите внимание. Убывание g не линейное: «на 19% меньше» не означает «на высоте $0{,}19R$». Сила зависит от квадрата расстояния, и уже на высоте $R/9 \approx 0{,}11R$ ускорение падает почти на пятую часть.



Ускорение свободного падения в масштабе: у поверхности, на высоте $R/9$ и для сравнения на высоте R.

Ответ (матрёшкой).

$$\frac{R^2}{(R+h)^2} = 0{,}81 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{R}{\sqrt{0{,}81}} - R = \frac{R}{9}.$$

Проверка. Размерность: h выражена через R — длина. Второй способ: подставим $h = R/9$ обратно, $g/g_0 = (9/10)^2 = 0{,}81$, то есть на

19% меньше. Предел: если бы g не уменьшилось ($g/g_0 = 1$), формула $h = R/\sqrt{g/g_0} - R$ дала бы $h = 0$, как и должно быть.

Смысл: «минус 19%» — это ровно $0{,}9^2$, поэтому расстояние до центра растёт в $10/9$ раза.

Ответ. $h = \dfrac{R}{9}$.