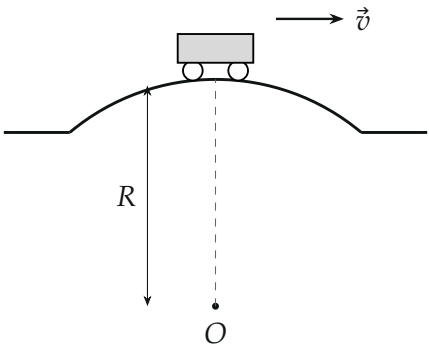
Автомобиль на выпуклом мосту

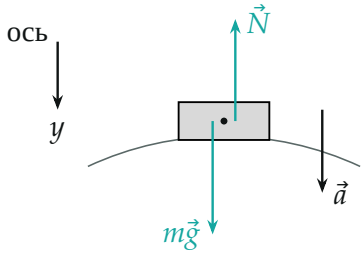
Задача 3. [Физтех 2015/16, 9 класс, задача 3] Автомобиль массой m при движении по выпуклому мосту давит на мост в верхней точке с силой $0{,}9\,mg$. С какой силой будет давить на мост в верхней точке этот же автомобиль при движении со скоростью в 2 раза большей?



Поясняющий рисунок: автомобиль в верхней точке выпуклого моста — дуги окружности радиусом R с центром O.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на движение по окружности: в верхней точке моста автомобиль движется по дуге, и ускорение у него центростремительное, направленное вниз, к центру кривизны моста. Его сообщает разность силы тяжести и силы реакции моста. Чем больше скорость, тем больше нужное ускорение, тем меньше остаётся на долю реакции — автомобиль давит на мост слабее. Ключевой закон — второй закон Ньютона в проекции на вертикаль.

Обозначения. v — скорость в первом случае, $2v$ — во втором; R — радиус кривизны моста в верхней точке; N_1 и N_2 — силы реакции моста в верхней точке в первом и втором случае. По третьему закону Ньютона автомобиль давит на мост с силой, равной по модулю силе реакции, поэтому $N_1 = 0{,}9\,mg$, а искомое — N_2.



Автомобиль m в верхней точке: сила тяжести, сила реакции моста и центростремительное ускорение; ось y — к центру кривизны, вниз.

1. Второй закон Ньютона в верхней точке. На автомобиль по вертикали действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции моста $\vec{N}$ (силы трения и тяги горизонтальны и в вертикальную проекцию не входят):

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}.$$

Ось y направим вниз, к центру O — вдоль ускорения, чтобы проекция ускорения была просто $a = v^2/R$. В проекции на ось y:

$$m\frac{v^2}{R} = mg - N.$$

Отсюда $N = mg - \dfrac{mv^2}{R}$: реакция меньше силы тяжести на величину, нужную для центростремительного ускорения.

2. Первый случай: находим mv^2/R. При $N_1 = 0{,}9\,mg$:

$$\frac{mv^2}{R} = mg - 0{,}9\,mg = 0{,}1\,mg.$$

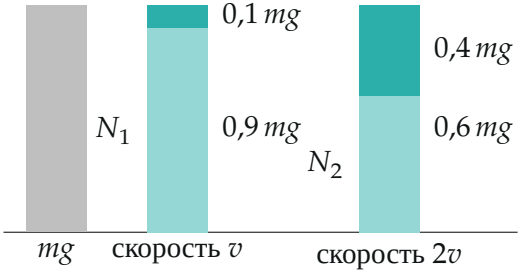
Радиус R и скорость v по отдельности не известны, но и не нужны: в ответ войдёт только их комбинация mv^2/R.

3. Второй случай: скорость $2v$. Центростремительное ускорение пропорционально квадрату скорости, поэтому при скорости $2v$ «нуж-

ная» сила вырастет в 4 раза:

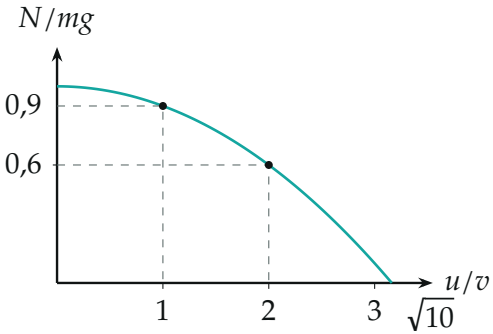
$$\frac{m(2v)^2}{R} = 4 \cdot 0{,}1\, mg = 0{,}4\, mg, \qquad N_2 = mg - 0{,}4\, mg = 0{,}6\, mg.$$

Сила положительна — автомобиль от моста не отрывается, и запись второго закона с силой реакции законна.



Сила тяжести mg делится на две части: реакцию N (светлая) и долю на центростремительное ускорение mv^2/R (тёмная). При удвоении скорости тёмная часть растёт вчетверо.

4. Как сила давления зависит от скорости. Обозначим $v_{\text{отр}}$ скорость, при которой $N = 0$: $mv_{\text{отр}}^2/R = mg$, то есть $v_{\text{отр}}^2 = 10v^2$. Тогда $N/mg = 1 - 0{,}1\,(u/v)^2$, где u — скорость автомобиля. Нашему случаю $u = 2v$ соответствует точка на графике.



Сила давления на мост в верхней точке в зависимости от скорости u (в долях v): парабола $1 - 0{,}1(u/v)^2$ по вычисленным точкам; $u = v$ даёт 0,9, $u = 2v$ даёт 0,6; при $u = \sqrt{10}\,v$ автомобиль отрывается.

Обратите внимание. Сила давления уменьшается не вдвое и не на «удвоенную разницу»: при удвоении скорости вчетверо растёт именно разность $mg - N$, а не сама сила N. Отсюда $0{,}6\,mg$, а не $0{,}8\,mg$ и не $0{,}45\,mg$.

Ответ (матрёшкой).

$$N_2 = mg - 4\,(mg - N_1) = 4N_1 - 3mg = 4 \cdot 0{,}9\,mg - 3mg = 0{,}6\,mg.$$

Проверка. Размерность: все слагаемые — силы. Предел: при $N_1 = mg$ (стоящий автомобиль, $v = 0$) формула даёт $N_2 = mg$ — удвоенный ноль остаётся нулём. Второй способ — через $v_{\text{отр}}$: $N_2/mg = 1 - (2v)^2/v_{\text{отр}}^2 = 1 - 4/10 = 0{,}6$.

Смысл: на выпуклом мосту быстрая машина «легчает», и это облегчение растёт как квадрат скорости.

Ответ. $N_2 = 4N_1 - 3mg = 0{,}6\,mg$.