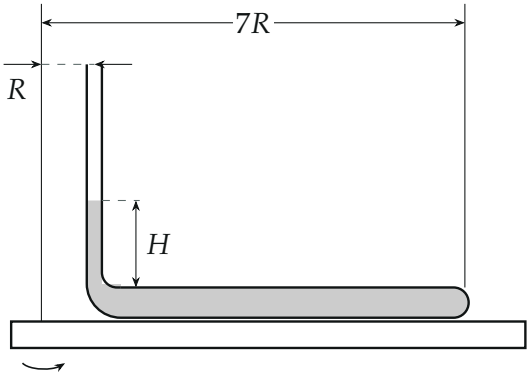
Трубка на вращающейся платформе

Задача 4. [Физтех 2015/16, 9 класс, задача 4] Тонкая трубка запаяна с одного конца, заполнена жидкостью плотностью ρ и закреплена на горизонтальной платформе (см. рис.). Открытое колено трубки вертикально и заполнено жидкостью до высоты H. Платформа вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси. Вертикальное колено находится на расстоянии R, а конец горизонтального — на расстоянии $7R$ от оси вращения. Атмосферное давление P_0.

1. Найти давление жидкости в месте изгиба трубки.
2. Найти давление жидкости в горизонтальном колене на расстоянии $2R$ от оси вращения.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Жидкость вращается вместе с платформой и относительно трубки покоится. Каждая её частица движется по окружности, и центростремительное ускорение ей сообщает разность давлений на её концах. Поэтому вдоль горизонтального колена давление растёт к периферии. В вертикальном колене частицы движутся по одной окружности радиуса R и по вертикали ускорения не имеют — там давление распределено как в покоящейся жидкости. Класс задачи — «гидростатика» во вращающемся сосуде: второй закон Ньютона для малого элемента жидкости.

Обозначения. S — сечение трубки; r — расстояние от оси; $P(r)$ — давление в горизонтальном колене; P_1 — давление в месте изгиба ($r =$

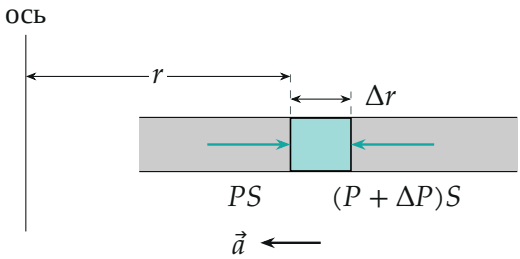
R), P_2 — на расстоянии $2R$. Трубка тонкая: её толщиной по сравнению с R и H пренебрегаем.

Пункт 1. Давление в месте изгиба.

1. Вертикальное колено. Выделим в вертикальном колене столб жидкости от свободной поверхности до изгиба. Он движется по окружности радиуса R в горизонтальной плоскости, поэтому вертикальная проекция его ускорения равна нулю. Второй закон Ньютона для столба в проекции на вертикаль: сверху давит атмосфера P_0S, снизу — жидкость с силой P_1S, вниз тянет сила тяжести ρSHg:

$$0 = P_1S - P_0S - \rho gHS \quad \Rightarrow \quad P_1 = P_0 + \rho gH.$$

Горизонтальные силы (от стенок) в эту проекцию не входят — поэтому вращение на давление в изгибе не влияет.



Малый элемент жидкости Δr в горизонтальном колене: сила давления снаружи (от оси) больше, чем изнутри; их разность сообщает элементу центростремительное ускорение $\omega^2 r$ к оси.

Пункт 2. Давление на расстоянии $2R$.

2. Малый элемент горизонтального колена. Возьмём элемент жидкости длиной Δr на расстоянии r от оси, масса $\Delta m = \rho S\Delta r$. Он движется по окружности радиуса r с ускорением $\omega^2 r$, направленным к оси. Вдоль колена на него действуют только силы давления: к оси — $(P + \Delta P)S$ с внешнего торца, от оси — PS с внутреннего. Второй закон Ньютона в проекции на направление к оси:

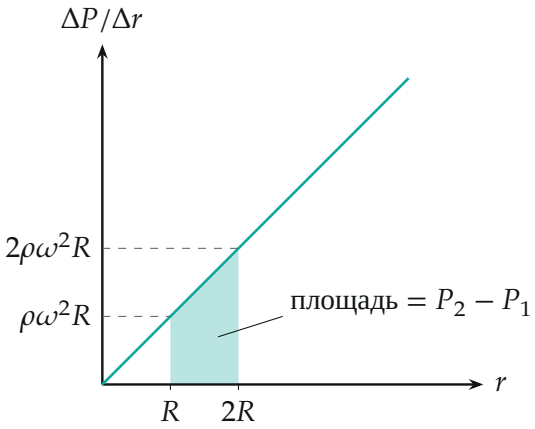
$$\rho S\Delta r\, \omega^2 r = (P + \Delta P)S - PS \quad \Rightarrow \quad \Delta P = \rho\omega^2 r\, \Delta r.$$

Давление растёт при удалении от оси: $\Delta P > 0$ при $\Delta r > 0$.

3. Сумма по элементам от изгиба до $2R$. Приращение ΔP пропорционально $r\Delta r$ — площади узкой полоски под прямой $y = \rho\omega^2 r$. Сложим приращения от $r = R$ до $r = 2R$: сумма равна площади трапеции под этой прямой,

$$P_2 - P_1 = \frac{\rho\omega^2 R + \rho\omega^2 \cdot 2R}{2} \cdot (2R - R) = \frac{3}{2}\rho\omega^2 R^2.$$

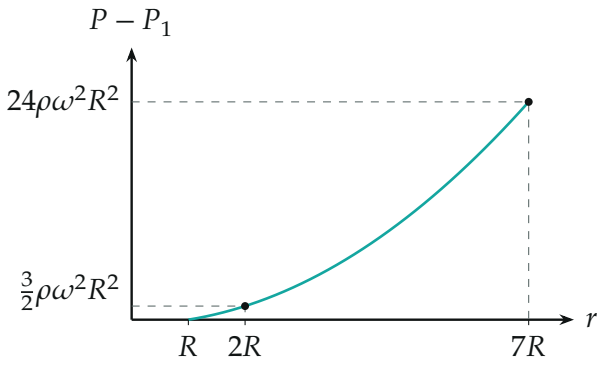
То же даёт формула $P(r) - P_1 = \dfrac{\rho\omega^2}{2}\left(r^2 - R^2\right)$ при $r = 2R$: $\dfrac{\rho\omega^2}{2}(4R^2 - R^2)$.



Скорость роста давления $\Delta P/\Delta r = \rho\omega^2 r$ — прямая; площадь трапеции под ней от R до $2R$ и есть $P_2 - P_1$.

4. Давление в точке $2R$. Подставим P_1 из пункта 1:

$$P_2 = P_0 + \rho g H + \frac{3}{2}\rho\omega^2 R^2.$$



Давление вдоль горизонтального колена по вычисленным точкам: парабола $P - P_1 = \frac{\rho\omega^2}{2}(r^2 - R^2)$; у запаянного конца ($7R$) прибавка $24\rho\omega^2R^2$.

Обратите внимание. Давление в изгибе не зависит от ω, хотя жидкость вращается: вертикальный столб движется по окружности целиком, вертикального ускорения у него нет. А на участке от R до $2R$ ускорение $\omega^2 r$ переменное, поэтому разность давлений — не $\rho\omega^2 R \cdot R$ и не $\rho\omega^2 \cdot 2R \cdot R$, а среднее: $\frac{3}{2}\rho\omega^2R^2$.

Ответ (матрёшкой).

$$P_1 = P_0 + \rho g H, \qquad P_2 = P_1 + \frac{\rho\omega^2}{2}((2R)^2 - R^2) = P_0 + \rho g H + \frac{3}{2}\rho\omega^2R^2.$$

Проверка. Размерность: $[\rho\omega^2R^2] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot \frac{1}{\text{с}^2} \cdot \text{м}^2 = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$ — давление. Предел: при $\omega = 0$ давление в горизонтальном колене всюду $P_0 + \rho g H$, как в покоящемся сообщающемся сосуде. Второй способ для пункта 2 — трапеция и формула с r^2 дали одно и то же.

Смысл: жидкость в горизонтальном колене «прижимается» к запаянному концу, и давление растёт как квадрат расстояния от оси.

Ответ. 1) $P_1 = P_0 + \rho g H$; 2) $P_2 = P_0 + \rho g H + \frac{3}{2}\rho\omega^2R^2$.