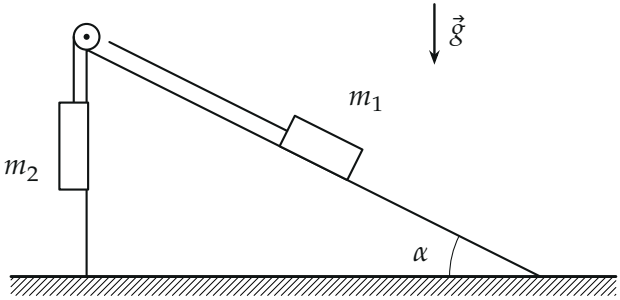
Клин, блок и сила трения

Задача 5. [Физтех 2015/16, 9 класс, задача 5] Клин массой $4m$ находится на шероховатой горизонтальной поверхности стола (см. рис.). Через блок, укреплённый на вершине клина, перекинута лёгкая нерастяжимая нить, связывающая грузы, массы которых $m_1 = 3m$ и $m_2 = m$. Грузы удерживают, затем отпускают. После этого грузы движутся, а клин покоится. Гладкая наклонная поверхность клина образует с горизонтом угол α ($\sin\alpha = 0{,}8$).

1. Найдите ускорение грузов.
2. Найдите силу трения, действующую на клин со стороны стола.



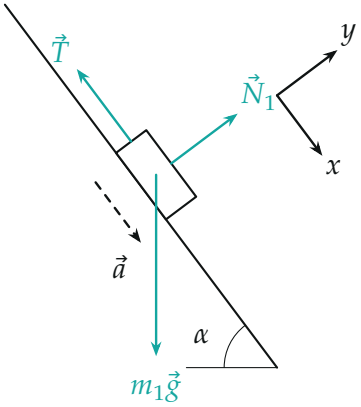
▲ **Решение. Что происходит.** Клин покоится, поэтому грузы движутся как по неподвижной горке. Сначала — задача о связанных телах: второй закон Ньютона для каждого груза. Заранее выясним, кто перетягивает: составляющая силы тяжести груза m_1 вдоль склона $m_1 g \sin\alpha = 2{,}4\,mg$ больше силы тяжести груза m_2, равной mg. Значит, груз m_1 скользит вниз по склону, а груз m_2 поднимается. Затем — равновесие клина: груз давит на склон, нить тянет блок, и в сумме эти силы толкают клин вбок; удерживает его сила трения покоя стола.

Обозначения. $\cos\alpha = \sqrt{1 - 0{,}8^2} = 0{,}6$. T — натяжение нити, одинаковое по обе стороны блока (нить лёгкая, массой и трением блока пренебрегаем); a — модуль ускорения грузов (нить нерастяжима, он у них общий); N_1 — сила реакции склона на груз m_1; $F_{\text{тр}}$ — сила трения стола на клин.

Пункт 1. Ускорение грузов.

1. Груз m_1. Оси: x — вдоль склона вниз (по ускорению: проекции ускорения будут положительными), y — по нормали к склону (по ней ускорения нет, из этой проекции найдём N_1). Второй закон Ньютона $m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T}$ в проекциях:

$$x:\ 3m\,a = 3mg\sin\alpha - T, \qquad y:\ 0 = N_1 - 3mg\cos\alpha.$$



Груз m_1: сила тяжести, реакция гладкого склона и натяжение нити вдоль склона к блоку; ось x — по ускорению, вниз по склону. Угол здесь настоящий, $\sin\alpha = 0{,}8$.

2. Груз m_2. Он движется вверх с тем же по модулю ускорением. Второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось вверх:

$$m\,a = T - mg.$$

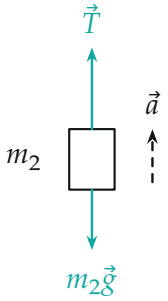
3. Ускорение. Сложим уравнения шагов 1 и 2 — натяжение уйдёт:

$$4m\,a = 3mg\sin\alpha - mg \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3\sin\alpha - 1}{4}\,g = \frac{2{,}4 - 1}{4}\,g = \frac{7}{20}\,g = 0{,}35\,g.$$

Знак плюс подтверждает выбранное направление: груз m_1 действительно едет вниз по склону, груз m_2 — вверх. Отсюда натяжение и реакция

склона, нужные для клина:

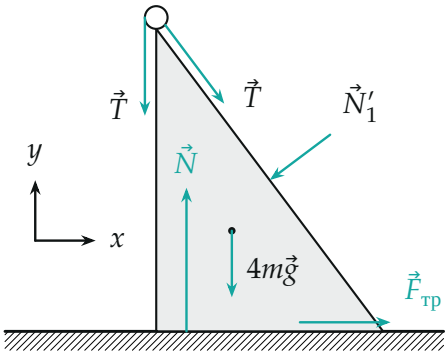
$$T = m(g + a) = \frac{27}{20}\,mg = 1{,}35\,mg, \qquad N_1 = 3mg\cos\alpha = 1{,}8\,mg.$$



Груз m_2: натяжение больше силы тяжести ($1{,}35\,mg$ против mg), ускорение вверх.

Пункт 2. Сила трения.

4. Силы на клин вместе с блоком. Рассматриваем клин и блок как одно тело, тогда сила оси блока — внутренняя, а нить действует на тело через блок. Внешние силы: $4m\vec{g}$; сила давления груза m_1 на склон $\vec{N}_1'$ — по третьему закону Ньютона равна N_1 и направлена в клин по нормали к склону; две силы натяжения на блок, обе по T: вдоль склона вниз (к грузу m_1) и вертикально вниз (к грузу m_2); со стороны стола — реакция $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$.



Клин с блоком: давление груза m_1, два натяжения на блок, тяжесть, реакция и трение стола.

5. Равновесие клина. Ось x — горизонтально вправо (от вертикальной грани к основанию склона), y — вверх; нормаль склона, направленная в клин, имеет проекции $(-\sin\alpha, -\cos\alpha)$, направление вниз по склону — $(\cos\alpha, -\sin\alpha)$. Нам нужна только сила трения, поэтому достаточно проекции на x — в неё не входят ни тяжесть, ни реакция стола, ни вертикальное натяжение. Условие равновесия клина $\sum \vec{F} = 0$ в проекции на x:

$$-N_1 \sin\alpha + T\cos\alpha + F_{\text{тр},x} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{\text{тр},x} = N_1 \sin\alpha - T\cos\alpha.$$

Подставим:

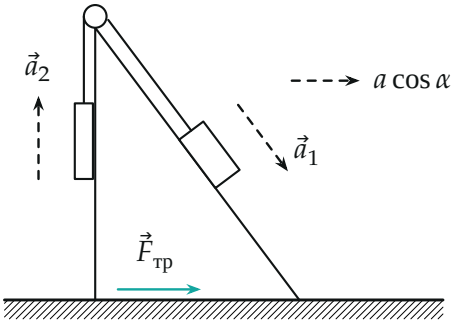
$$F_{\text{тр},x} = 1{,}8{\cdot}0{,}8\,mg - 1{,}35{\cdot}0{,}6\,mg = 1{,}44\,mg - 0{,}81\,mg = 0{,}63\,mg = \frac{63}{100}\,mg.$$

Знак плюс: трение направлено вправо, к основанию склона. Без него клин уехал бы влево: груз давит на склон сильнее, чем нить тянет блок в обратную сторону.

6. Второй способ — система «клин + блок + грузы». Внутренние силы (натяжение, давление на склон) уходят. Внешние горизонтальные силы — только $F_{\text{тр}}$. По второму закону Ньютона для системы она равна сумме $m_i a_{ix}$. Горизонтальное ускорение есть только у груза m_1: $a\cos\alpha$ вправо (груз m_2 движется вертикально, клин покоится):

$$F_{\text{тр},x} = 3m \cdot a\cos\alpha = 3m \cdot 0{,}35\,g \cdot 0{,}6 = 0{,}63\,mg.$$

Совпало.



Вся система: ускорения есть только у грузов; горизонтальную составляющую $a\cos\alpha$ ускорения груза m_1 обеспечивает трение стола.

Обратите внимание. На клин действует не только давление груза, но и натяжения нити через блок на его вершине. Забыть их — значит получить $F_{\text{тр}} = 1{,}44\,mg$ вместо $0{,}63\,mg$. Во втором способе нить вообще не нужна — поэтому он и служит проверкой.

Ответ (матрёшкой).

$$a = \frac{m_1\sin\alpha - m_2}{m_1 + m_2}\,g = \frac{7}{20}\,g, \qquad F_{\text{тр}} = m_1 a\cos\alpha = \frac{63}{100}\,mg.$$

Проверка. Размерность: a — доля g, $F_{\text{тр}}$ — доля mg. Предел: при $m_1\sin\alpha = m_2$ грузы не разгоняются, $a = 0$ и $F_{\text{тр}} = 0$ — покоящейся системе трение не нужно; из шага 5 при $T = m_1 g\sin\alpha$ тоже $F_{\text{тр}} = m_1 g\cos\alpha\sin\alpha - m_1 g\sin\alpha\cos\alpha = 0$. Два способа шагов 5 и 6 дали одно и то же.

Смысл: сила трения стола сообщает системе горизонтальную составляющую ускорения груза, скользящего по склону.

Ответ. 1) $a = \frac{7}{20}\,g$ (груз m_1 скользит вниз по клину, груз m_2 поднимается); 2) $F_{\text{тр}} = \frac{63}{100}\,mg$, направлена от вертикальной грани клина к основанию склона.