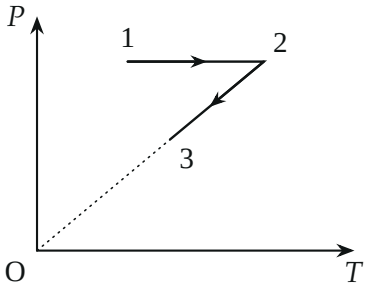
Газ в процессе: изобара и прямая P(T)

Задача 3. [Физтех 2016/17, 10 класс, задача 3] На диаграмме зависимости давления P газа от температуры T для гелия в количестве $\nu = 3/2$ моль показано, что сначала газ нагревался в изобарном процессе 1-2, а затем охлаждался в процессе 2-3 прямо пропорциональной зависимости давления от температуры. Температуры газа в состояниях 1, 2 и 3 $T_1 = 150$ К, $T_2 = 3T_1$, $T_3 = 2T_1$. Отношение давлений в состояниях 1 и 3 равно $3/2$.

1. Найдите работу газа в процессе 1-2-3.
2. Найдите отношение количества теплоты, подведённого к газу в процессе 1-2, к количеству теплоты, отведённому от газа в процессе 2-3.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на первое начало термодинамики для идеального газа в двух изопроцессах. Ключ — распознать процесс 2-3: прямая $P \propto T$, проходящая через начало координат, по уравнению Менделеева — Клапейрона $P = \dfrac{\nu R}{V} T$ означает постоянный объём. Значит, 1-2 — изобара, 2-3 — изохора; работа совершается только на изобаре, а теплоты считаются по теплоёмкостям одноатомного газа.

Обозначения. $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К); $P_1 = P_2$ — давление на изобаре; V_1, $V_2 = V_3$ — объёмы; A, ΔU, Q с индексами процессов — работа газа, изменение внутренней энергии и полученная газом теплота.

1. Процесс 2-3 — изохора. Уравнение Менделеева — Клапейрона $PV = \nu RT$ для произвольного состояния на участке 2-3: $P = \dfrac{\nu R}{V} T$.

По условию $P \propto T$ с постоянным коэффициентом, значит, $V = \text{const}$, $V_3 = V_2$. Проверка с данными: на изохоре $P_2/P_3 = T_2/T_3 = 3/2$, а $P_2 = P_1$, так что $P_1/P_3 = 3/2$ — ровно то, что сказано в условии.

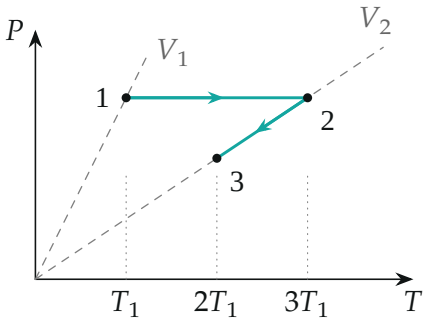


Диаграмма $P(T)$ в масштабе. Пунктир — изохоры: прямые через начало координат, чем больше объём, тем положе прямая. Процесс 2-3 идёт по изохоре V_2; точка 1 лежит на более крутой изохоре $V_1 < V_2$.

2. Объёмы. Уравнение состояния на изобаре 1-2 при одном давлении: $V \propto T$, поэтому $V_2 = V_1 \dfrac{T_2}{T_1} = 3V_1$. Газ расширился втрое, затем остывал при неизменном объёме $3V_1$.

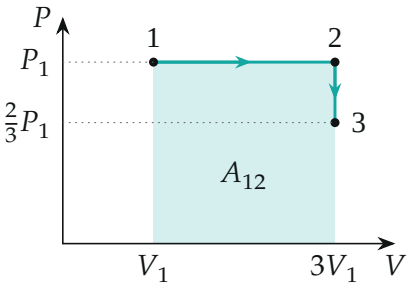
Пункт 1.

3. Работа. Работа газа при постоянном давлении равна $P\Delta V$; на изохоре объём не меняется и работа равна нулю. Вместе с уравнением состояния $P_1V_1 = \nu RT_1$, $P_1V_2 = \nu RT_2$:

$$A = A_{12} + A_{23} = P_1(V_2 - V_1) + 0 = \nu R(T_2 - T_1) = 2\nu RT_1.$$

Численно:

$$A = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 8{,}31 \cdot 150 \text{ Дж} \approx 3{,}74 \text{ кДж}.$$



Тот же процесс в координатах P–V (в масштабе). Работа газа — площадь под графиком: прямоугольник под изобарой 1-2; под изохорой 2-3 площади нет.

Пункт 2.

4. Теплота на изобаре 1-2. Первое начало термодинамики $Q = \Delta U + A$, внутренняя энергия одноатомного газа $U = \frac{3}{2}\nu RT$:

$$Q_{12} = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) + \nu R(T_2 - T_1) = \frac{5}{2}\nu R \cdot 2T_1 = 5\nu RT_1 > 0.$$

Знак плюс: газ теплоту получает.

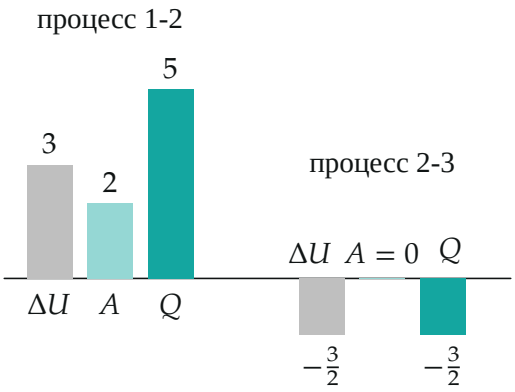
5. Теплота на изохоре 2-3. Работа равна нулю, вся теплота идёт на изменение внутренней энергии:

$$Q_{23} = \Delta U_{23} = \frac{3}{2}\nu R(T_3 - T_2) = -\frac{3}{2}\nu RT_1 < 0.$$

Знак минус: газ теплоту отдаёт, и отведённая теплота равна $|Q_{23}| = \frac{3}{2}\nu RT_1$.

6. Отношение.

$$\frac{Q_{12}}{|Q_{23}|} = \frac{5\nu RT_1}{\frac{3}{2}\nu RT_1} = \frac{10}{3}.$$



Энергетический баланс в единицах νRT_1: на изобаре $Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} = 3 + 2 = 5$, на изохоре $Q_{23} = \Delta U_{23} = -\frac{3}{2}$. Отношение высот бирюзовых столбиков Q — $10/3$.

Обратите внимание: «отношение давлений в состояниях 1 и 3» — не лишнее данное, а проверка того, что 2-3 — изохора: при $P \propto T$ на 2-3 и $P_2 = P_1$ оно обязано равняться $T_2/T_3 = 3/2$.

Проверка. Размерность: νRT — джоули. Второй способ для Q_{12}: молярная теплоёмкость одноатомного газа при постоянном давлении $C_P = \frac{5}{2}R$, $Q_{12} = \nu C_P(T_2 - T_1) = \frac{5}{2}\nu R \cdot 2T_1 = 5\nu RT_1$; при постоянном объёме $C_V = \frac{3}{2}R$, $|Q_{23}| = \nu C_V(T_2 - T_3) = \frac{3}{2}\nu RT_1$ — то же. Смысл: на изобаре газ тратит часть полученной теплоты на работу, на изохоре работы нет, поэтому за нагрев на $2T_1$ газ получает втрое с лишним больше теплоты, чем отдаёт при остывании на T_1.

Ответ. 1) $A = 2\nu RT_1 \approx 3{,}74$ кДж; 2) $\dfrac{Q_{12}}{|Q_{23}|} = \dfrac{10}{3}$.