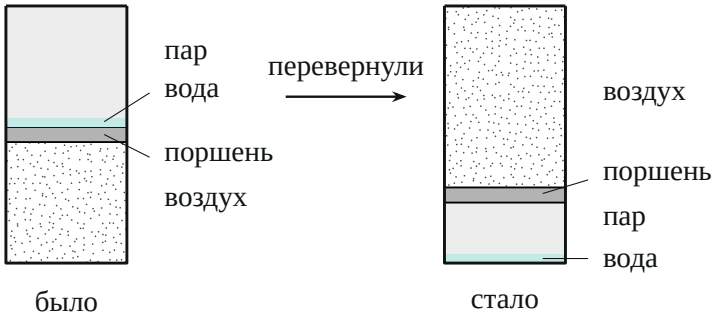
Поршень с водой и паром при переворачивании цилиндра

Задача 4. [Физтех 2016/17, 10 класс, варианты 2–3, задача 4] Поршень делит объём герметичного вертикально расположенного цилиндра на две части. Стенки цилиндра хорошо проводят теплоту. Снаружи цилиндра поддерживается постоянная температура $T = 373$ К. Поршень создаёт своим весом дополнительное давление $P = P_0/5$, где P_0 — нормальное атмосферное давление. Под поршнем в объёме $V_0 = 1$ л находится воздух, над поршнем в объёме V_0 — вода массой $m_1 = 1{,}2$ г и водяной пар. Система в равновесии. Цилиндр переворачивают вверх дном. После наступления равновесия под поршнем находится вода и водяной пар, над поршнем — воздух.

1. Найдите объём пара в конечном состоянии.
2. Найдите массу воды в конечном состоянии.

Объём воды значительно меньше объёма цилиндра, масса воды значительно меньше массы поршня. Трением поршня о цилиндр пренебречь. Молярная масса водяного пара $\mu = 18$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К).



Поясняющий рисунок: цилиндр до переворота и после него. Объём воды на рисунке для наглядности преувеличен.

▲ **Решение. Что происходит.** Вода и пар в цилиндре находятся в равновесии при температуре 373 К, то есть при температуре кипения воды

при нормальном атмосферном давлении. Раз в обоих состояниях присутствует жидкая вода, пар в обоих состояниях насыщенный, и его давление равно давлению насыщенных паров при 373 К: P_0. Меняется объём пара — вода испаряется или конденсируется, а давление остаётся P_0. Воздух подчиняется закону Бойля — Мариотта: температура постоянна, стенки хорошо проводят теплоту. Это задача на насыщенный пар: предположение (вода есть — пар насыщенный), расчёт, проверка. Идея: давления из равновесия поршня, объём воздуха, объём и масса пара.

Обозначения. S — площадь поршня, p_1 и p_2 — давление воздуха в первом и втором состояниях, $V_в$ — объём воздуха во втором состоянии, V — объём пара во втором состоянии, m_2 — масса воды в конце. Полный объём цилиндра $2V_0$: объёмом воды и толщиной поршня пренебрегаем.

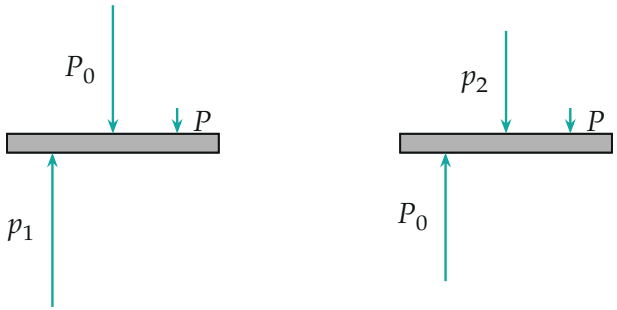
Пункт 1.

1. Равновесие поршня до переворота. Запишем второй закон Ньютона для поршня (ускорение нулевое) в проекции на вертикальную ось. Снизу воздух давит вверх с силой p_1S, сверху пар давит вниз с силой P_0S и вес поршня давит вниз с силой PS (по условию, вес создаёт давление P). Делим на S — площадь входит во все силы одинаково, и она уходит:

$$p_1 = P_0 + P = \frac{6}{5}P_0.$$

2. Равновесие поршня после переворота. Теперь пар под поршнем и давит вверх с P_0S, а воздух давит вниз с p_2S вместе с весом поршня PS:

$$P_0 = p_2 + P \quad \Rightarrow \quad p_2 = P_0 - P = \frac{4}{5}P_0.$$

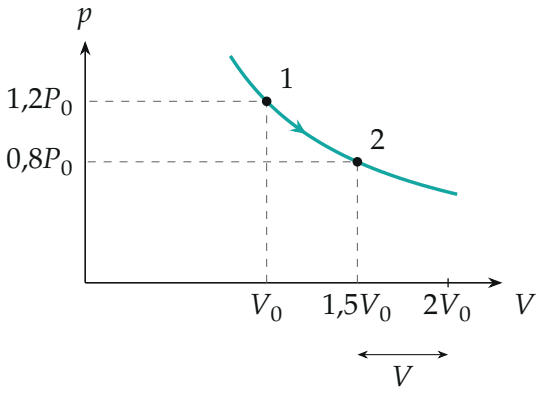


состояние 1: воздух внизу состояние 2: пар внизу

Давления на поршень в двух состояниях; длины стрелок пропорциональны давлению (P_0 изображено отрезком 1,7 см). Стрелки вверх уравновешены суммой стрелок вниз: $1{,}2 = 1{,}0 + 0{,}2$ *и* $1{,}0 = 0{,}8 + 0{,}2$.

3. Объём воздуха — закон Бойля — Мариотта. Воздуха столько же, температура прежняя (стенки хорошо проводят теплоту, снаружи T): $p_1 V_0 = p_2 V_\text{в}$. Отсюда

$$V_\text{в} = \frac{p_1}{p_2} V_0 = \frac{6/5}{4/5} V_0 = \frac{3}{2} V_0.$$



Воздух в координатах p, V: изотерма $pV = \text{const}$ ($1{,}2P_0 \cdot V_0 = 0{,}8P_0 \cdot 1{,}5V_0$). Остальной объём цилиндра $2V_0$ занимает пар: $V = 2V_0 - 1{,}5V_0$.

4. Объём пара. Пар и воздух делят весь цилиндр:

$$V = 2V_0 - V_\text{в} = \frac{1}{2}V_0 = 0{,}5\text{ л}.$$

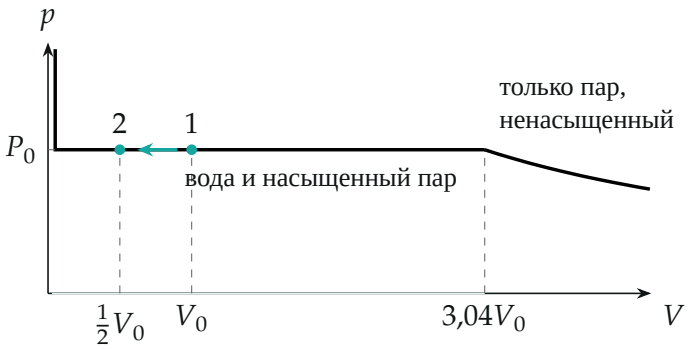
Пункт 2.

5. Масса пара в каждом состоянии. Запишем уравнение Менделеева — Клапейрона для пара: давление P_0 (насыщенный), температура T. В первом состоянии пара объём V_0, во втором — V:

$$P_0V_0 = \frac{m_\text{п1}}{\mu}RT, \qquad P_0V = \frac{m_\text{п2}}{\mu}RT.$$

Отсюда $m_\text{п1} = \dfrac{P_0V_0\mu}{RT}$ и $m_\text{п2} = \dfrac{P_0V\mu}{RT} = \dfrac{1}{2}m_\text{п1}$ — при тех же P_0 и T масса пара пропорциональна его объёму. При $P_0 = 1{,}013\cdot10^5$ Па

$$m_\text{п1} = \frac{1{,}013\cdot10^5\cdot10^{-3}\cdot18\cdot10^{-3}}{8{,}31\cdot373}\text{ кг} \approx 0{,}59\text{ г}, \qquad m_\text{п2} \approx 0{,}29\text{ г}.$$

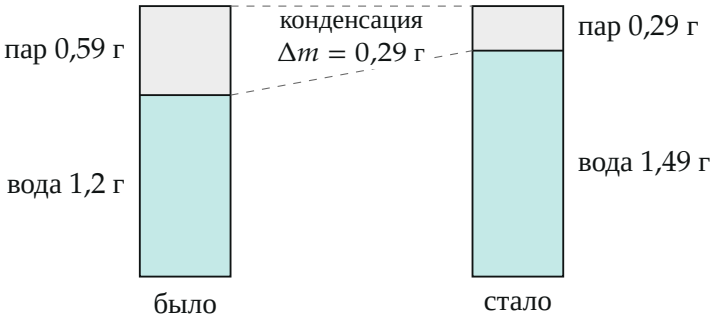


Изотерма $T = 373$ K для воды с паром: пока вода есть, давление пара равно P_0 при любом объёме (горизонтальный отрезок). Состояния 1 и 2 лежат на нём; вода полностью испарилась бы лишь при объёме $\approx 3V_0$.

6. Баланс массы. Герметичный цилиндр: сумма масс воды и пара не

меняется (воздух в испарении не участвует):

$$m_1 + m_{п1} = m_2 + m_{п2} \Rightarrow m_2 = m_1 + (m_{п1} - m_{п2})$$
$$= m_1 + \frac{P_0 V_0 \mu}{2RT} \approx 1{,}2 + 0{,}29 \approx 1{,}5 \text{ г}.$$



Масса воды и пара до и после переворота (по вертикали — масса). Полная масса не меняется, вода прибавила 0,29 г.

Обратите внимание: пар насыщенный в обоих состояниях только потому, что вода остаётся жидкой там и там. Проверка предположения (рисунок выше): всей воды с паром $1{,}2 + 0{,}59 = 1{,}79$ г, при P_0 и T она заняла бы пар объёмом $\approx 3V_0$, а у нас V_0 и $V_0/2$ — оба состояния на горизонтальном отрезке. В начале воды 1,2 г, а полностью испариться в объёме V_0 могло бы лишь 0,59 г — вода есть; в конце воды 1,49 г — тоже есть. Не хватило бы воды — пар стал бы ненасыщенным, и считать его давление равным P_0 было бы нельзя.

Проверка. Предельный случай: если поршень невесом ($P \to 0$), то $p_1 = p_2 = P_0$, $V_в = V_0$, $V = V_0$ и $m_2 = m_1$: переворот ничего не меняет — формулы дают именно это. Размерность: $P_0 V_0 \mu/(RT)$ — Па · м^3 · кг/моль / Дж/моль = килограммы. Второй способ для пункта 1: $(P_0 + P)V_0 = (P_0 - P)(2V_0 - V)$ — тот же $V = V_0/2$. Смысл: после переворота вес поршня уже не добавляется к давлению воздуха, а вычитается, воздух расширяется, места пару остаётся меньше, и лишний пар становится водой.

Ответ. 1) $V = \frac{1}{2}V_0 = 0{,}5$ л; 2) $m_2 = m_1 + \frac{P_0 V_0 \mu}{2RT} \approx 1{,}5$ г.