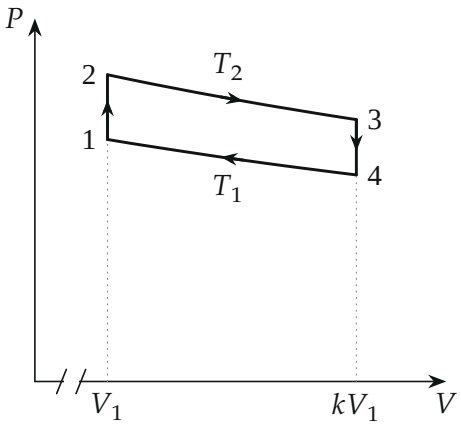
Цикл из двух изотерм и двух изохор

Задача 5. [Физтех 2016/17, 10 класс, задача 5] Одноатомный идеальный газ в количестве $\nu = 1$ моль участвует в прямом циклическом процессе, составленном из двух изотерм и двух изохор. При изохорическом нагревании газ получает $Q_1 = 1000$ Дж теплоты, при изотермическом расширении газ получает ещё $Q_2 = 500$ Дж теплоты. Известно, что минимальная температура в процессе $T_1 = 300$ К.

1. Найдите максимальную температуру T_2 газа в цикле.
2. Найдите работу A газа при расширении.
3. Найдите КПД η цикла.



Поясняющий рисунок: цикл в координатах P–V по расчёту ($k \approx 1{,}17$; ось V показана с разрывом): изохора 1-2, изотерма 2-3 при T_2, изохора 3-4, изотерма 4-1 при T_1.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на первое начало термодинамики для цикла из изопроцессов. Цикл прямой (идёт по часовой стрелке в координатах P–V): газ нагревается при постоянном объёме от T_1 до T_2, расширяется при T_2, остывает при постоянном объёме до T_1 и сжимается при T_1. Теплоту газ получает на изохоре 1-2 и изотерме 2-3. Главная идея: работы на двух изотермах между одними и теми же объёмами

относятся как температуры — это даёт работу за цикл без вычисления объёмов.

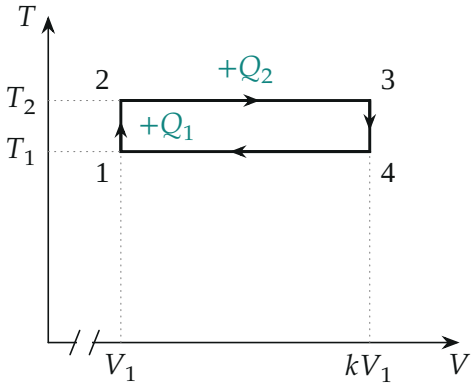
Обозначения. $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К); состояния 1–4 как на рисунке, $V_2 = V_1$, $V_3 = V_4 = kV_1$ ($k > 1$); T_2 — максимальная температура (на изотерме расширения), T_1 — минимальная. A_{ij} — работа газа, Q_{ij} — полученная газом теплота в процессе i-j.

Пункт 1.

1. Изохорное нагревание 1-2. Первое начало термодинамики $Q = \Delta U + A$; объём постоянен, работа равна нулю; внутренняя энергия одноатомного газа $U = \frac{3}{2}\nu RT$:

$$Q_1 = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) \quad \Rightarrow$$
$$T_2 = T_1 + \frac{2Q_1}{3\nu R} = 300\ \text{K} + \frac{2 \cdot 1000}{3 \cdot 8{,}31}\ \text{K} \approx 380\ \text{K}.$$

Температура в цикле выше T_2 не поднимается: на изотерме 2-3 она постоянна, а на изохоре 3-4 падает.

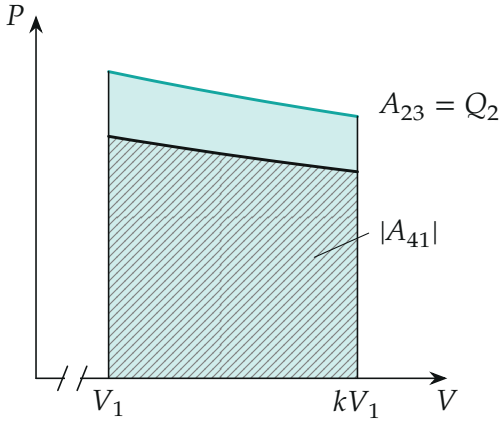


Тот же цикл в координатах T–V (в масштабе $T_2/T_1 \approx 1{,}27$): изотермы — горизонтальные отрезки, изохоры — вертикальные. Самая высокая температура T_2 — на всей изотерме 2-3, самая низкая T_1 — на изотерме 4-1. Бирюзовым — где газ получает теплоту.

Пункт 2.

2. Работа при расширении. Газ расширяется только на изотерме 2-3 (на изохорах объём постоянен, на изотерме 4-1 газ сжимается). На изотерме температура, а с ней и внутренняя энергия, не меняются, $\Delta U_{23} = 0$, и первое начало даёт

$$A = A_{23} = Q_2 = 500 \text{ Дж}.$$



Работы на изотермах — площади под ними: под изотермой T_2 (бирюзовая заливка) — работа расширения A_{23}, под изотермой T_1 (штриховка) — модуль работы сжатия $|A_{41}|$. Полоска между кривыми — работа за цикл.

Пункт 3.

3. Работы на изотермах. Работа газа на изотерме при температуре T между объёмами V_1 и kV_1 (сумма $P\,dV$ с $P = \nu RT/V$ по всем малым шагам расширения):

$$A_{23} = \nu RT_2 \ln k, \qquad A_{41} = \nu RT_1 \ln \frac{V_1}{kV_1} = -\nu RT_1 \ln k.$$

Обе изотермы проходят между одними и теми же объёмами (их соеди-

няют изохоры), поэтому множитель $\ln k$ общий и

$$\frac{|A_{41}|}{A_{23}} = \frac{T_1}{T_2} \quad \Rightarrow$$
$$A_{41} = -Q_2 \frac{T_1}{T_2} \approx -500 \cdot \frac{300}{380}\ \text{Дж} \approx -395\ \text{Дж}.$$

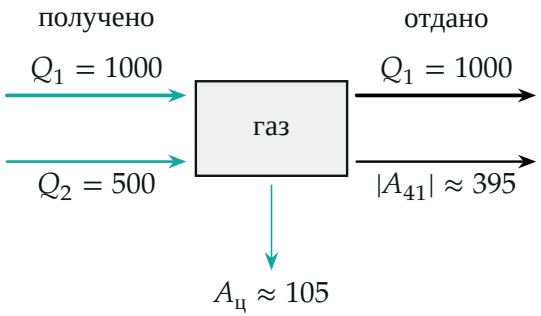
Знак минус: на изотерме 4-1 газ сжимают, работа газа отрицательна.

4. Работа за цикл. На изохорах работа равна нулю:

$$A_\text{ц} = A_{23} + A_{41} = Q_2\left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) \approx 500 \cdot \frac{80}{380}\ \text{Дж} \approx 105\ \text{Дж}.$$

5. Полученная теплота. КПД — отношение работы за цикл к теплоте, *полученной* газом от нагревателя. Газ получает теплоту на участках 1-2 (Q_1) и 2-3 (Q_2). На изохоре 3-4 он остывает и отдаёт $\frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) = Q_1$, на изотерме 4-1 отдаёт $|A_{41}|$. Поэтому

$$\eta = \frac{A_\text{ц}}{Q_1 + Q_2} = \frac{Q_2}{Q_1 + Q_2} \cdot \frac{T_2 - T_1}{T_2} \approx \frac{105}{1500} \approx 0{,}07.$$



Баланс теплоты за цикл, в джоулях: слева — полученная теплота (изохора 1-2 и изотерма 2-3), справа — отданная (изохора 3-4 и изотерма 4-1), вниз — работа за цикл, разность: $1500 - 1000 - 395 \approx 105$.

Обратите внимание: теплота Q_1, полученная при изохорном нагревании, целиком возвращается на изохоре 3-4 (температура меняется на

те же $T_2 - T_1$), но в знаменатель КПД она входит: КПД считается по теплоте, полученной от нагревателя, а не по разности. Из-за этого КПД цикла (0,07) намного меньше КПД цикла Карно с теми же температурами, $1 - T_1/T_2 \approx 0{,}21$.

Проверка. Размерность: $Q/(\nu R)$ — кельвины, η безразмерен. Второй способ для работы за цикл — первое начало для всего цикла: за цикл $\Delta U = 0$, работа равна разности полученной и отданной теплот, $A_{\text{ц}} = (Q_1 + Q_2) - (Q_1 + |A_{41}|) = Q_2 - |A_{41}| \approx 105$ Дж — то же. Проверка численно (python): $T_2 = 380{,}2$ K, $\ln k = Q_2/(\nu R T_2) = 0{,}158$, $|A_{41}| = 394{,}5$ Дж, $\eta = 0{,}0703$. Предел: $T_2 \to T_1$ — работа и КПД обращаются в ноль, цикл вырождается. Смысл: из 1500 Дж теплоты в работу уходит лишь около 105 Дж.

Ответ. 1) $T_2 = T_1 + \dfrac{2Q_1}{3\nu R} \approx 380$ K; 2) $A = Q_2 = 500$ Дж; 3) $\eta = \dfrac{Q_2}{Q_1 + Q_2} \cdot \dfrac{T_2 - T_1}{T_2} \approx 0{,}07$.