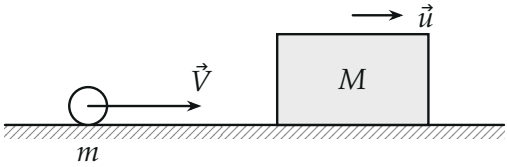
Упругий удар шарика о массивный брусок

Задача 1. [Физтех 2016/17, 10 класс, задача 1] Шарик, скользящий по гладкой горизонтальной поверхности, догоняет брусок, который движется в том же направлении по этой поверхности. Грань бруска, о которую ударяется шарик, перпендикулярна вектору скорости шарика. Масса бруска много больше массы шарика. После упругого столкновения шарик скользит в противоположном направлении с кинетической энергией, которая в 81 раз меньше его начальной кинетической энергии. Найти отношение начальных скоростей скольжения шарика и бруска.



Поясняющий рисунок: шарик массой m со скоростью $\vec{V}$ догоняет брусок массой $M \gg m$, едущий со скоростью $\vec{u}$; $V > u$, иначе шарик не догонит брусок.

▲ **Решение. Что происходит.** Это упругий удар лёгкого тела о массивное. Брусок при ударе скорость не меняет, поэтому удобно перейти в систему отсчёта бруска: в ней брусок — неподвижная стенка, и шарик отскакивает от неё с той же по модулю скоростью, как мяч от стены. Вернувшись в систему отсчёта земли, получим скорость шарика после удара, а условие на энергию даст уравнение на V/u.

Обозначения. m — масса шарика, M — масса бруска; V и u — начальные скорости шарика и бруска относительно земли; V' — скорость шарика после удара. Ось x направлена по движению бруска; все скорости — проекции на эту ось.

1. Брусок при ударе скорость не меняет. Закон сохранения импульса системы шарик + брусок за время удара (по горизонтали внешних сил нет: поверхность гладкая):

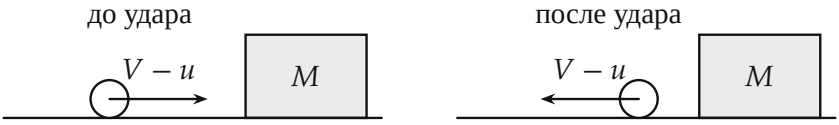
$$mV + Mu = mV' + Mu' \quad \Rightarrow \quad u' - u = \frac{m}{M}(V - V') \to 0 \text{ при } M \gg m.$$

Скорость бруска до и после удара одна и та же, u. Значит, система отсчёта бруска — инерциальная и до, и после удара.

2. Удар в системе отсчёта бруска. Скорость шарика относительно бруска до удара (закон сложения скоростей)

$$v_{\text{отн}} = V - u > 0$$

— шарик подлетает к грани. В этой системе брусок неподвижен, удар упругий, кинетическая энергия шарика сохраняется, поэтому скорость шарика меняет только знак: после удара $v'_{\text{отн}} = -(V - u)$.

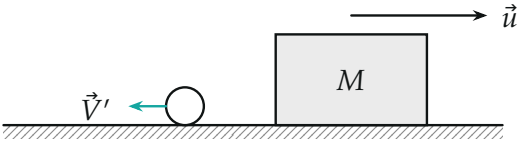


Система отсчёта бруска. Брусок покоится, шарик подлетает со скоростью $V - u$ и после упругого удара улетает обратно с той же по модулю скоростью.

3. Обратно в систему отсчёта земли. Закон сложения скоростей: скорость шарика относительно земли равна скорости относительно бруска плюс скорость бруска:

$$V' = -(V - u) + u = 2u - V.$$

По условию шарик после удара едет в противоположном направлении, значит, $V' < 0$, то есть $V > 2u$: шарик должен догонять брусок больше чем вдвое быстрее него.



Система отсчёта земли после удара: брусок едет с прежней скоростью $\vec{u}$, шарик — назад, медленно: $V' = 2u - V < 0$, по модулю в 9 раз меньше V (бирюзовая стрелка).

4. Условие на энергию. Кинетическая энергия шарика после удара в 81 раз меньше начальной:

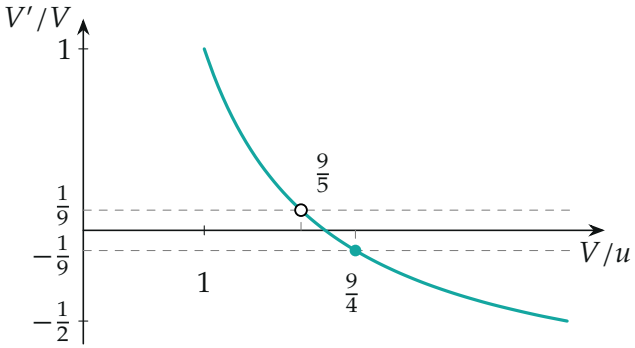
$$\frac{mV'^2}{2} = \frac{1}{81}\cdot\frac{mV^2}{2} \quad\Rightarrow\quad |V'| = \frac{V}{9}.$$

Так как $V' < 0$ (шаг 3), $|V'| = V - 2u$:

$$V - 2u = \frac{V}{9} \quad\Rightarrow\quad \frac{8}{9}V = 2u \quad\Rightarrow\quad \frac{V}{u} = \frac{9}{4}.$$

Проверим: $V/u = 9/4 > 2$ — шарик действительно отлетает назад.

Обратите внимание: у уравнения $|2u - V| = V/9$ есть второй корень, $2u - V = +V/9$, то есть $V/u = 9/5$. Ему соответствует шарик, продолживший ехать вперёд, — это противоречит условию «в противоположном направлении». Знак скорости после удара определяет, какой корень взять.



Скорость шарика после удара в долях начальной, $V'/V = 2u/V - 1$, как функция V/u (догон — $V/u > 1$). Энергия в 81 раз меньше — $|V'/V| = \frac{1}{9}$: бирюзовая точка $V/u = \frac{9}{4}$ (шарик отлетает назад), белая $V/u = \frac{9}{5}$ (шарик едет вперёд, не подходит).

Проверка. Размерность: отношение скоростей безразмерно. Второй способ — общая формула упругого удара с конечной массой бруска: $V' = \frac{(m-M)V+2Mu}{m+M} \to 2u - V$ при $m/M \to 0$ — то же, что в шаге 3. Подстановка: $V = 9$, $u = 4$ (в любых единицах), $V' = 2\cdot 4 - 9 = -1$,

$|V'| = V/9$, энергия в 81 раз меньше. Смысл: в системе бруска шарик отскакивает назад почти с той же скоростью, с какой брусок едет вперёд, — поэтому относительно земли шарик почти останавливается.

Ответ. $\dfrac{V}{u} = \dfrac{9}{4}$, где V — начальная скорость шарика, u — бруска.