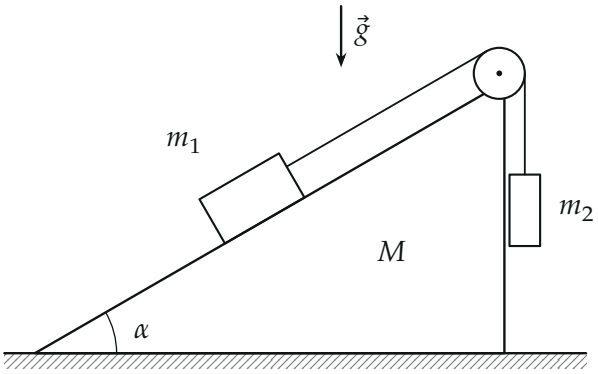
Клин с блоком и грузами на столе: ускорение, натяжение, реакция

Задача 2. [Физтех 2016/17, 10 класс, задача 2] Клин массой M находится на шероховатой горизонтальной поверхности стола. Через блок, укреплённый на вершине клина, перекинута лёгкая нерастяжимая нить, связывающая грузы, массы которых m_1 и m_2 (см. рис.). Грузы удерживают, затем отпускают. После этого грузы движутся, а клин покоится. Гладкая наклонная поверхность клина образует с горизонтальной плоскостью угол $\alpha = \pi/6$. Считайте $M = 2m$, $m_1 = m$, $m_2 = 2m$. Массой блока и трением в его оси пренебречь.

1. Найдите ускорение грузов.
2. Найдите силу T натяжения нити.
3. Найдите силу N нормальной реакции, действующей на клин со стороны стола.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на второй закон Ньютона для связанных тел. Клин покоится, поэтому система отсчёта клина инерциальна: грузы движутся в ней по прямым — m_1 вдоль наклонной плоскости, m_2 вертикально, с одинаковым по модулю ускорением (нить нерастяжима). Тяжёлый груз m_2 опускается и тянет m_1 вверх по склону. Для силы N удобно рассмотреть всю систему клин + грузы: внешние силы

на неё — тяжесть, реакция и трение стола, а сумма $m\vec{a}$ отлична от нуля только у грузов.

Обозначения. a — модуль ускорения грузов, T — сила натяжения нити (одна и та же по обе стороны блока: блок и нить невесомы, трения в оси нет), N_1 — сила реакции наклонной плоскости на груз m_1. Для m_1 ось x_1 — вдоль склона вверх, ось y_1 — перпендикулярно склону; для m_2 ось y_2 — вертикально вниз.

Пункт 1.

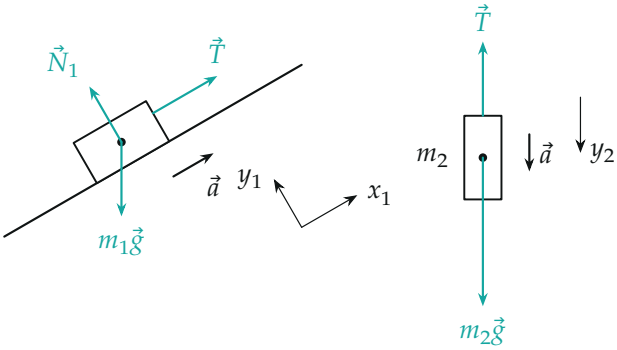
1. Уравнения движения грузов. Второй закон Ньютона для груза m_1: $m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T}_1$, в проекции на ось x_1 (вдоль склона — чтобы N_1 не вошла):

$$m_1 a = T - m_1 g \sin\alpha.$$

Второй закон Ньютона для груза m_2: $m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + \vec{T}_2$, в проекции на ось y_2 (вниз):

$$m_2 a = m_2 g - T.$$

Направления ускорений выбраны в предположении, что m_2 опускается; знак a это проверит.



Силы на грузы (длины стрелок — в масштабе для найденного ответа: $T = m_1 g$, $N_1 = m_1 g\cos\alpha$, $m_2 g = 2T$) и ускорения: m_1 едет вверх по склону, m_2 опускается.

2. Ускорение. Сложим два уравнения шага 1 — натяжение сократит-

ся:

$$(m_1 + m_2)\,a = (m_2 - m_1 \sin\alpha)\,g \quad \Rightarrow$$

$$a = \frac{m_2 - m_1 \sin\alpha}{m_1 + m_2}\,g = \frac{2 - \frac{1}{2}}{3}\,g = \frac{g}{2}.$$

$a > 0$: груз m_2 действительно опускается.

Пункт 2.

3. Натяжение. Из уравнения для m_1:

$$T = m_1(a + g\sin\alpha) = m\left(\frac{g}{2} + \frac{g}{2}\right) = mg.$$

Проверка по второму грузу: $T = m_2(g - a) = 2m \cdot \dfrac{g}{2} = mg$ — то же.

Пункт 3.

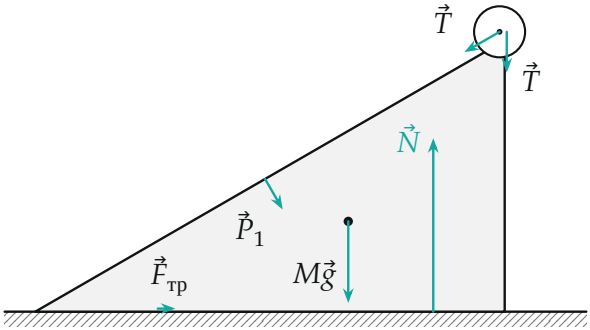
4. Сила реакции стола: вся система. Второй закон Ньютона для системы клин + блок + нить + грузы в проекции на вертикальную ось y вверх. Внешние вертикальные силы — тяжесть всех тел $(M+m_1+m_2)g$ вниз и реакция стола N вверх (трение стола горизонтально). Клин покоится, поэтому в сумме $\sum m\,a_y$ участвуют только грузы: у m_1 ускорение направлено вверх по склону, $a_{1y} = +a\sin\alpha$; у m_2 — вниз, $a_{2y} = -a$:

$$N - (M + m_1 + m_2)g = m_1 a\sin\alpha - m_2 a.$$

Отсюда

$$N = (M + m_1 + m_2)g + m_1 a\sin\alpha - m_2 a$$
$$= 5mg + m\cdot\frac{g}{2}\cdot\frac{1}{2} - 2m\cdot\frac{g}{2} = \frac{17}{4}\,mg.$$

Реакция меньше полного веса $5mg$: система в целом «облегчается», потому что тяжёлый груз опускается с ускорением.

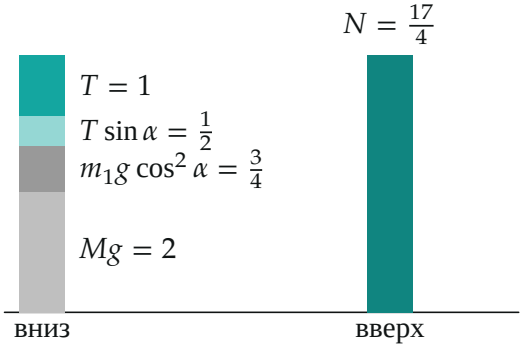


Силы на клин с блоком (масштаб вдвое мельче, чем на рисунке сил на грузы): тяжесть $M\vec{g}$, реакция стола $\vec{N}$, давление груза $\vec{P}_1$ (по модулю $N_1 = m_1 g \cos\alpha$, перпендикулярно склону), две силы натяжения нити на блок и трение стола $\vec{F}_{тр}$.

5. Второй способ: силы на клин. Клин с блоком покоится, сумма вертикальных сил на него равна нулю. На него действуют: тяжесть Mg вниз; давление груза m_1 — по третьему закону Ньютона равно $N_1 = m_1 g \cos\alpha$ (из уравнения для m_1 по оси y_1: ускорения поперёк склона нет) и направлено перпендикулярно склону внутрь клина, его вертикальная составляющая $N_1 \cos\alpha$ вниз; нить действует на блок двумя силами T — вдоль склона к грузу m_1 (вертикальная составляющая $T \sin\alpha$ вниз) и вертикально вниз к грузу m_2. Условие равновесия по вертикали:

$$N = Mg + m_1 g \cos^2\alpha + T \sin\alpha + T$$
$$= 2mg + \frac{3}{4} mg + \frac{1}{2} mg + mg = \frac{17}{4} mg,$$

то же значение.



Баланс вертикальных сил на клин в единицах mg (высоты столбиков в масштабе): четыре силы вниз в сумме $\frac{17}{4}$ уравновешены реакцией стола.

Обратите внимание: нельзя считать N равной весу всех тел $(M + m_1 + m_2)g$ — грузы движутся с ускорением, и вес системы отличается от $5mg$. Нельзя и забыть силы нити на блок: блок закреплён на клине, и через него нить давит на клин.

Проверка. Размерность: везде mg или g. Два независимых способа для N (через систему и через силы на клин) дали $\frac{17}{4}mg$; два уравнения для T дали mg. Предел: при $a \to 0$ (грузы в равновесии) первая формула шага 4 даёт $N = (M + m_1 + m_2)g$ — обычный вес покоящейся системы. Смысл: опускающийся груз «облегчает» стол на $m_2 a$, поднимающийся по склону — «утяжеляет» на $m_1 a \sin\alpha$, итог — на $\frac{3}{4}mg$ меньше полного веса.

Ответ. 1) $a = \dfrac{m_2 - m_1 \sin\alpha}{m_1 + m_2} g = \dfrac{g}{2}$; 2) $T = mg$; 3) $N = \dfrac{17}{4} mg = 4{,}25\, mg$.