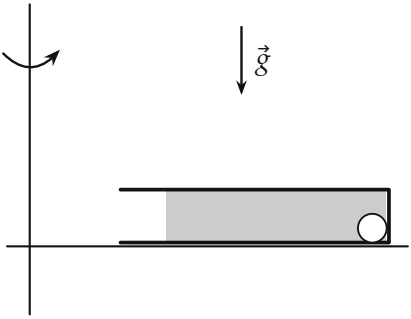
# Шарик в пробирке на роторе ультрацентрифуги

**Задача 3.** [Физтех 2016/17, 10 класс, задача 3] Ротор ультрацентрифуги вращается вокруг вертикальной оси с частотой $n = 5 \cdot 10^4$ об/мин. На роторе закреплена небольшая пробирка с водой (см. рис.). Ось пробирки горизонтальна, направлена по радиусу ротора, дно пробирки вертикально и находится на расстоянии $L = 10$ см от оси вращения. В пробирке у дна находится шарик объёмом $V = 0{,}1$ см$^3$ и массой $m = 0{,}25$ г. С какой силой шарик действует на дно пробирки? Плотность воды $\rho = 1$ г/см$^3$.



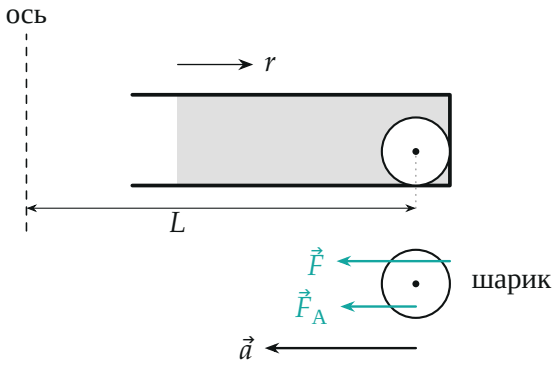

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на второй закон Ньютона для тела, движущегося по окружности, и на закон Архимеда в «тяжёлой» жидкости. Шарик вместе с водой и пробиркой равномерно вращается по окружности радиуса $L$, его ускорение направлено к оси и равно $\omega^2 L$. Это ускорение ему сообщают две горизонтальные силы, направленные к оси: сила давления воды (выталкивающая сила) и сила реакции дна. Главная идея: выталкивающая сила равна той силе, которая заставила бы двигаться по той же окружности воду объёмом $V$ на месте шарика; поэтому дно добирает только разность $(m - \rho V)\,\omega^2 L$.

**Обозначения.** $\omega$ — угловая скорость ротора, $n$ — частота в оборотах в секунду; $F_\text{A}$ — горизонтальная выталкивающая сила, $F$ — сила реакции дна на шарик (по третьему закону Ньютона шарик давит на дно с такой же силой). Ось $r$ — горизонтально от оси вращения к дну пробирки. Размер шарика мал по сравнению с $L$: расстояние от его центра до оси считаем равным $L$.

**1. Угловая скорость и ускорение.** Частота $n = 5 \cdot 10^4$ об/мин $= \dfrac{5 \cdot 10^4}{60}$ об/с $\approx 833$ об/с, угловая скорость

$$\omega = 2\pi n \approx 5{,}24 \cdot 10^3 \text{ рад/с}, \qquad \omega^2 L \approx 2{,}74 \cdot 10^6 \text{ м/с}^2.$$

Центростремительное ускорение почти в $3 \cdot 10^5$ раз больше $g$ — поэтому вертикальными силами (тяжестью $mg$ и вертикальной частью выталкивающей силы $\rho V g$) по сравнению с горизонтальными можно пренебречь: они уравновешивают друг друга и стенку пробирки и на силу давления на дно не влияют.

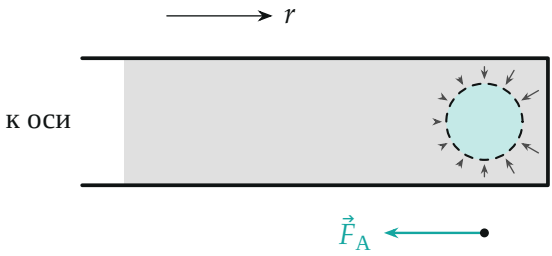



*Горизонтальные силы на шарик (вид сбоку, шарик с силами вынесен ниже; длины стрелок $\vec{F}$ и $\vec{F}_A$ — в масштабе): реакция дна $\vec{F}$ и выталкивающая сила $\vec{F}_A$ направлены к оси вращения, туда же направлено ускорение $\vec{a}$ (центростремительное). По расчёту $F = 1{,}5\,F_A$.*

**2. Выталкивающая сила: заменим шарик водой.** Мысленно заменим шарик водой того же объёма $V$. Эта вода вращается вместе с остальной водой, то есть движется по окружности радиуса $L$ с ускорением $\omega^2 L$ к оси. Ничего, кроме давления окружающей воды, горизонтально на неё не действует (она касается дна, но не давит на него сильнее, чем остальная вода). Второй закон Ньютона для этой воды в проекции на ось $r$:

$$-\rho V \omega^2 L = -F_\text{A} \quad \Rightarrow \quad F_\text{A} = \rho V \omega^2 L.$$

Давление воды вокруг шарика такое же, как вокруг воды на его месте, поэтому и на шарик действует та же сила $F_\text{A}$, направленная к оси. Это закон Архимеда, в котором вместо $g$ стоит центростремительное ускорение $\omega^2 L$.




*Шарик мысленно заменён водой того же объёма (бирюзовая заливка). Силы давления окружающей воды (серые стрелки) больше со стороны дна — давление растёт к дну, — и их сумма $\vec{F}_A$ (показана под пробиркой) сообщает этой воде центростремительное ускорение: $F_A = \rho V \omega^2 L$.*

**3. Второй закон Ньютона для шарика.** В проекции на ось $r$ (к дну), ускорение направлено против оси:

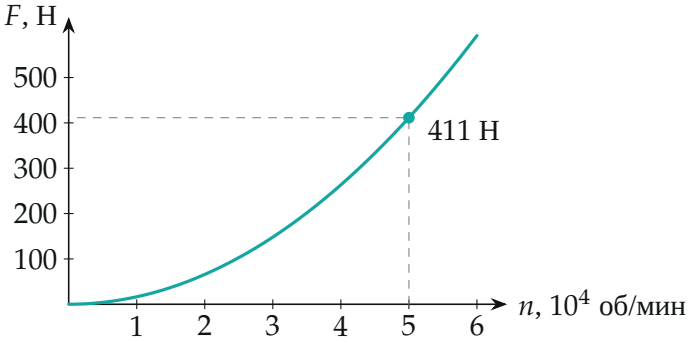
$$-m\omega^2 L = -F - F_\text{A} \quad \Rightarrow \quad F = (m - \rho V)\,\omega^2 L = (m - \rho V)(2\pi n)^2 L.$$

Знак плюс у $F$ при $m > \rho V$: шарик тяжелее вытесненной воды и прижат к дну; лёгкий шарик всплыл бы к оси.

**4. Численно.** $m - \rho V = 0{,}25$ г $- 0{,}1$ г $= 0{,}15$ г $= 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ кг:

$$F = 1{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot 2{,}74 \cdot 10^6 \text{ Н} \approx 411 \text{ Н} \approx 0{,}4 \text{ кН}.$$

По третьему закону Ньютона шарик давит на дно с той же силой $F$, направленной от оси.




*Сила давления шарика на дно в зависимости от частоты вращения (парабола $F \propto n^2$, по расчёту). При $n = 5 \cdot 10^4$ об/мин — 411 Н, при вдвое меньшей частоте — вчетверо меньше.*

**Обратите внимание:** частоту нужно перевести в обороты в секунду и умножить на $2\pi$: $\omega = 2\pi n$, а не $n$ в об/мин. Ошибка в переводе даёт ответ в 3600 раз меньше.

**Проверка.** Размерность: кг·с$^{-2}$·м = Н. Предел: при $\rho V = m$ (шарик той же плотности, что вода) $F = 0$ — шарик «плавает» и на дно не давит, как и должно быть. Второй способ — в системе отсчёта ротора: на шарик действует центробежная сила инерции $m\omega^2 L$ от оси, выталкивающая сила $\rho V\omega^2 L$ к оси и реакция дна $F$ к оси; шарик покоится, $F = m\omega^2 L - \rho V\omega^2 L$ — то же. Смысл: шарик массой четверть грамма давит на дно с силой около 40 кгс — в центрифуге «вес» тел растёт в сотни тысяч раз.

**Ответ.** $F = (m - \rho V)(2\pi n)^2 L \approx 0{,}4$ кН ($\approx 411$ Н).