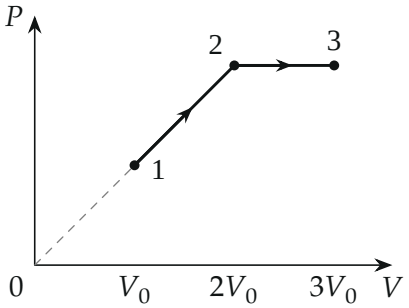
Работа газа в процессах P V и изобаре

Задача 4. [Физтех 2016/17, 10 класс, задача 4] Идеальный газ нагревают от объёма $V_1 = V_0$ до объёма $V_2 = 2V_0$ в процессе 1-2 прямо пропорциональной зависимости давления от объёма. Затем газ продолжают нагревать от объёма V_2 до объёма $V_3 = 3V_0$ в изобарическом процессе 2-3. Найти отношение работ газа в процессах 1-2 и 2-3.



Поясняющий рисунок: процесс в координатах P–V (в масштабе). На участке 1-2 точки лежат на прямой, проходящей через начало координат (продолжение — пунктир), участок 2-3 — изобара.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на работу газа по графику $P(V)$. Работа газа при расширении равна площади под графиком $P(V)$ между начальным и конечным объёмами: на каждом малом шаге dV газ совершает работу $P\,dV$ — площадь узкой полоски. Поэтому достаточно построить оба участка и сравнить площади. Уравнение состояния и сам газ не нужны: важна только форма графика.

Обозначения. P_1, P_2, P_3 — давления в состояниях 1, 2, 3; A_{12}, A_{23} — работы газа.

1. Давления. На участке 1-2 давление пропорционально объёму, $P = \beta V$ с постоянным β. Поэтому при удвоении объёма давление удваивается:

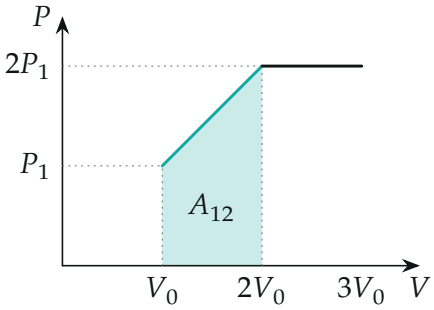
$$P_2 = P_1 \frac{V_2}{V_1} = 2P_1.$$

На изобаре 2-3 давление не меняется: $P_3 = P_2 = 2P_1$.

2. Работа в процессе 1-2. Под отрезком 1-2 лежит трапеция с основаниями P_1 и $2P_1$ и высотой $V_2 - V_1 = V_0$. Её площадь:

$$A_{12} = \frac{P_1 + P_2}{2}(V_2 - V_1) = \frac{P_1 + 2P_1}{2} V_0 = \frac{3}{2} P_1 V_0.$$

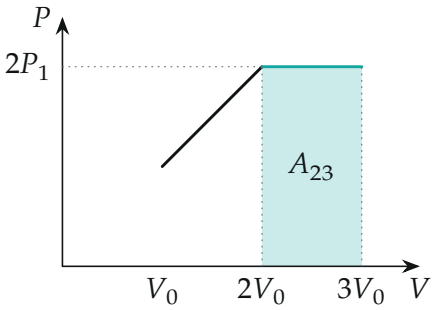
Второй способ — сумма $P\,dV$ с $P = \beta V$ (площадь под прямой): $A_{12} = \frac{\beta(V_2^2 - V_1^2)}{2} = \frac{\beta \cdot 3V_0^2}{2} = \frac{3}{2} P_1 V_0$, так как $\beta V_0 = P_1$.



Работа A_{12} — площадь трапеции под отрезком 1-2: основания P_1 и $2P_1$, высота V_0.

3. Работа в процессе 2-3. Под изобарой — прямоугольник высотой $2P_1$ и шириной $V_3 - V_2 = V_0$:

$$A_{23} = P_2 (V_3 - V_2) = 2P_1 V_0.$$

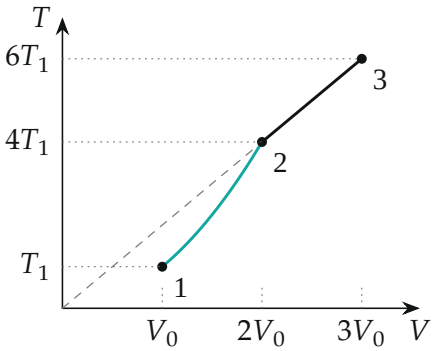


Работа A_{23} — площадь прямоугольника под изобарой 2-3: высота $2P_1$, ширина V_0. Прямоугольник выше трапеции при той же ширине, поэтому $A_{23} > A_{12}$.

4. Отношение работ.

$$\frac{A_{12}}{A_{23}} = \frac{\frac{3}{2}P_1V_0}{2P_1V_0} = \frac{3}{4}.$$

5. Газ действительно нагревается. Уравнение Менделеева — Клапейрона $PV = \nu RT$: на участке 1-2 $T = \beta V^2/(\nu R)$ растёт как квадрат объёма, на изобаре $T = P_2V/(\nu R)$ растёт пропорционально объёму. Температуры состояний относятся как $T_1 : T_2 : T_3 = P_1V_0 : 4P_1V_0 : 6P_1V_0 = 1 : 4 : 6$ — в обоих процессах газ нагревается, как сказано в условии.



Температура газа в зависимости от объёма (в масштабе): на участке 1-2 — парабола $T \propto V^2$, на изобаре 2-3 — прямая через начало координат (пунктир). Температура всё время растёт.

Обратите внимание: в процессе 1-2 давление растёт, поэтому работу нельзя считать как $P_1\,\Delta V$ или $P_2\,\Delta V$ — нужна средняя высота трапеции $\frac{3}{2}P_1$. Для прямой $P(V)$ среднее давление — полусумма крайних.

Проверка. Размерность: PV — джоули, отношение безразмерно. Второй способ для A_{12} дан в шаге 2 (сумма $P\,dV$ под прямой). Предел: если бы участок 1-2 тоже был изобарой при $2P_1$, работы были бы равны; рост

давления от P_1 уменьшает A_{12} — отношение меньше единицы, как и получилось. Смысл: на одинаковых приращениях объёма газ совершает больше работы там, где давление выше.

Ответ. $\dfrac{A_{12}}{A_{23}} = \dfrac{3}{4}$.