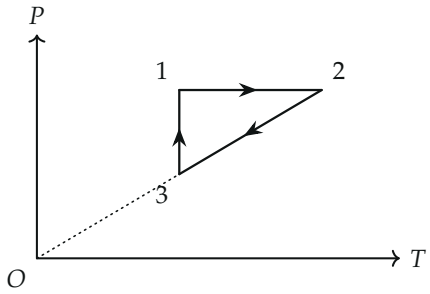
Тепловая машина: гелий, цикл на диаграмме P-T

Задача 5. [Физтех 2016/17, 10 класс, варианты 4–5, задача 5] Рабочим веществом тепловой машины является гелий в количестве ν. Цикл машины изображён на диаграмме зависимости давления P от температуры T (см. рис.). Процесс 1-2 изобарный, процесс 2-3 идёт с прямо пропорциональной зависимостью давления от температуры, процесс 3-1 изотермический. Температуры в состояниях 2 и 1 отличаются в 2 раза. КПД машины равен η. Температура в состоянии 1 равна T_1.



1. Найти работу газа за цикл.
2. Найти количество теплоты Q ($Q > 0$), отведённой от газа за цикл.

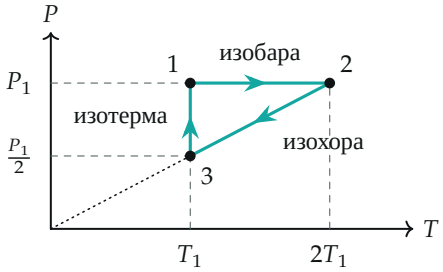
Замечание: единица количества вещества — моль.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Гелий — одноатомный идеальный газ: $U = \frac{3}{2}\nu RT$, $C_V = \frac{3}{2}R$, $C_P = \frac{5}{2}R$. За цикл $\Delta U = 0$, поэтому работа равна разности полученной и отданной теплоты. Тепло газ получает только на изобаре 1–2, где он расширяется и нагревается; на изохоре 2–3 он остывает, на изотерме 3–1 сжимается и отдаёт тепло. КПД — отношение работы к теплоте нагревателя, поэтому главное в задаче — найти теплоту Q_{12} на изобаре. Работа и отведённая теплота получаются из КПД и баланса энергии.

Обозначения. Q_{12} — теплота, полученная газом на участке 1–2; A — работа газа за цикл; Q — теплота, отведённая за цикл; P_1, V_1 — давление и объём в состоянии 1.

Пункт 1.

1. Что за процессы. Из уравнения состояния $P = \nu RT/V$ видно: прямая $P \propto T$ означает $V = \text{const}$, то есть участок 2–3 — изохора. Участок 1–2 — изобара, 3–1 — изотерма. Объёмы и давления выразим через состояние 1: на изобаре $V \propto T$, поэтому $V_2 = 2V_1$; на изохоре $V_3 = V_2 = 2V_1$, а $T_3 = T_1$, так что $P_3 = P_1/2$.



Цикл на диаграмме P–T: 1–2 изобара, 2–3 изохора (прямая через начало координат), 3–1 изотерма.

2. Теплота на изобаре 1–2. Запишем первый закон термодинамики для участка 1–2: $Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12}$. Изменение внутренней энергии $\Delta U_{12} = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}\nu RT_1$ (так как $T_2 = 2T_1$). Работа при $P = \text{const}$ равна $A_{12} = P_1(V_2 - V_1) = \nu R(T_2 - T_1) = \nu RT_1$. Значит,

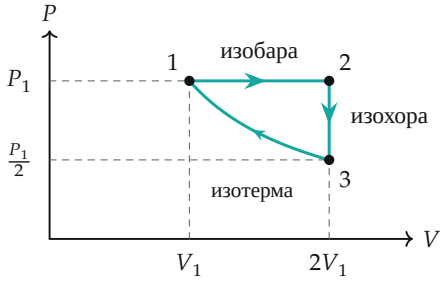
$$Q_{12} = \tfrac{3}{2}\nu RT_1 + \nu RT_1 = \tfrac{5}{2}\nu RT_1,$$

то же самое даёт $Q_{12} = \nu C_P(T_2 - T_1)$.

3. Нагреватель отдаёт теплоту только на участке 1–2. На изохоре 2–3 работа равна нулю, а температура падает ($T_3 = T_1 < T_2$), поэтому $Q_{23} = \nu C_V(T_3 - T_2) < 0$: газ отдаёт теплоту. На изотерме 3–1 внутренняя энергия не меняется, газ сжимается, $A_{31} < 0$, и $Q_{31} = A_{31} < 0$: газ отдаёт теплоту. Значит, теплота нагревателя — это Q_{12}, и КПД $\eta = A/Q_{12}$.

4. Работа за цикл. Из определения КПД

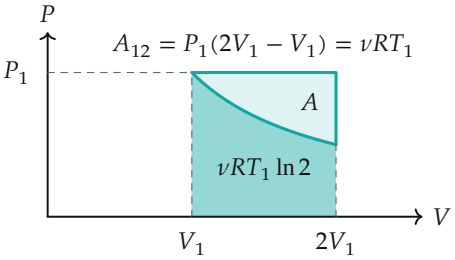
$$A = \eta Q_{12} = \tfrac{5}{2}\nu R\eta T_1.$$



Тот же цикл на диаграмме P–V: изотерма — гипербола $P = P_1V_1/V$, цикл идёт по часовой стрелке, работа газа положительна.

Работа вторым способом — прямо по диаграмме. Работа за цикл равна сумме работ на трёх участках. На изобаре $A_{12} = P_1(V_2 - V_1) = \nu RT_1$. На изохоре $A_{23} = 0$. На изотерме работа газа $A_{31} = \nu RT_1 \ln(V_1/V_3) = -\nu RT_1 \ln 2$ (газ сжимается, работа отрицательна). Тогда

$$A = \nu RT_1 - \nu RT_1 \ln 2 = (1 - \ln 2)\,\nu RT_1 \approx 0{,}31\,\nu RT_1.$$



Площадь под изобарой $= \nu RT_1$ (светлая и тёмная части вместе). Тёмная часть под гиперболой равна $\nu RT_1 \ln 2$ — это модуль работы на изотерме. Работа за цикл A — светлая часть.

Обратите внимание: КПД в условии — лишнее данное. Цикл полностью задан диаграммой (температуры T_1, $2T_1$ и вид трёх процессов), поэтому η из него следует: два выражения для A совпадают при

$$\eta = \frac{A}{Q_{12}} = \frac{(1 - \ln 2)\,\nu RT_1}{\frac{5}{2}\,\nu RT_1} = \frac{2}{5}\,(1 - \ln 2) \approx 0{,}12.$$

Противоречия нет: другого значения η у этого цикла быть не может. Организаторы засчитывают обе формы ответа — через η и через $\ln 2$; ниже даём обе, они равны.

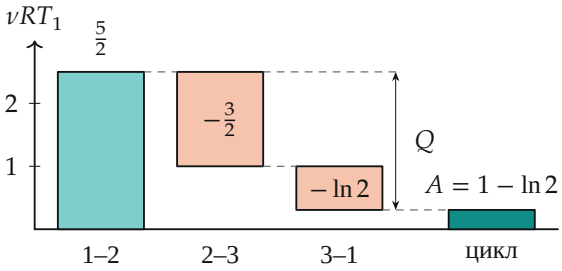
Пункт 2.

5. Первый закон термодинамики для цикла. За цикл газ возвращается в исходное состояние, $\Delta U = 0$. Полученная теплота Q_{12} идёт на работу A и на отведённую теплоту Q:

$$Q_{12} = A + Q \quad \Longrightarrow \quad Q = Q_{12} - A = \tfrac{5}{2}\nu RT_1 - \tfrac{5}{2}\nu R\eta T_1 = \tfrac{5}{2}\nu R(1-\eta)T_1.$$

6. Второй способ — сложить отданные теплоты. На изохоре $Q_{23} = \nu C_V(T_1 - T_2) = -\tfrac{3}{2}\nu RT_1$, на изотерме $Q_{31} = A_{31} = -\nu RT_1 \ln 2$. Отведённая теплота — их модули:

$$Q = |Q_{23}| + |Q_{31}| = \left(\tfrac{3}{2} + \ln 2\right)\nu RT_1 \approx 2{,}19\,\nu RT_1.$$



Тепловой баланс цикла в единицах νRT_1: получено $Q_{12} = \frac{5}{2}$, отдано на 2–3 и 3–1 вместе $Q = \frac{3}{2} + \ln 2$, остаётся работа $A = \frac{5}{2} - Q = 1 - \ln 2$.

Проверка. Размерность: νRT_1 — джоуль. Баланс: $Q_{12} - Q = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} - \ln 2 = 1 - \ln 2 = A$, как в пункте 1; КПД цикла $\eta = A/Q_{12} = \frac{2}{5}(1 - \ln 2) \approx 12\%$. Предел: КПД идеального цикла Карно между T_1 и $2T_1$ равен $\frac{1}{2}$, и $12\% < 50\%$.

Ответ. 1) $A = (1 - \ln 2)\,\nu RT_1 = \frac{5}{2}\nu R\eta T_1$;
2) $Q = (\frac{3}{2} + \ln 2)\nu RT_1 = \frac{5}{2}\nu R(1-\eta)T_1$.
Формы равны: КПД этого цикла $\eta = \frac{2}{5}(1 - \ln 2) \approx 0{,}12$.