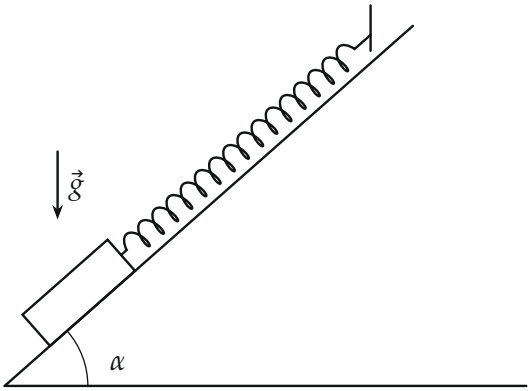
Затухающие колебания бруска на пружине с сухим трением

Задача 1. [Физтех 2016/17, 11 класс, задача 1] На наклонённой под углом α ($\cos\alpha = 3/4$) к горизонту поверхности лежит брусок, прикреплённый к упругой невесомой и достаточно длинной пружине (см. рис.). Коэффициент трения бруска о поверхность $\mu = 1/6$. Брусок отклоняют вниз вдоль поверхности на расстояние $A_0 = 35$ см от точки O, соответствующей положению равновесия бруска при отсутствии трения. Затем брусок отпускают, и начинаются затухающие колебания. Если брусок подвесить на этой пружине, то она удлиняется на $x_0 = 32$ см.

1. На каком расстоянии от точки O окажется брусок при первой остановке?
2. На каком расстоянии от точки O брусок остановится окончательно?
3. Через какое время брусок остановится окончательно?



▲ **Решение. Что происходит.** Это колебания с сухим трением: сила трения скольжения постоянна по модулю и всегда направлена против скорости. Пока брусок едет в одну сторону, трение — постоянная сила, а постоянная сила лишь сдвигает центр колебаний. Поэтому каждое полуколебание (от остановки до остановки) — кусок обычной гармонической синусоиды, но вокруг своего центра: при движении вверх центр

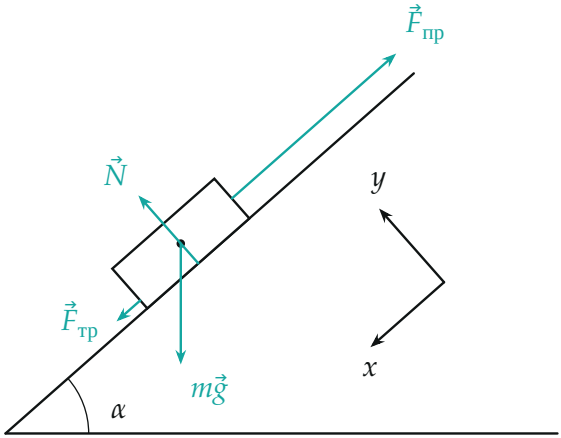
смещён вниз от точки O, при движении вниз — вверх. Главная идея: расстояние до O в точках остановки уменьшается на одну и ту же величину за каждое полуколебание, а окончательная остановка наступает, когда брусок остановился так близко к O, что пружина не может его сдвинуть против трения покоя.

Обозначения. m — масса бруска, k — жёсткость пружины, $g = 9{,}8$ м/с^2. Ось x направим вдоль наклонной плоскости вниз, начало — в точке O: тогда начальное положение имеет $x = A_0 > 0$, а расстояние до O есть $|x|$. Растяжение пружины в точке O обозначим Δ_0. Нормальная ось y — перпендикулярно плоскости от неё.

1. Жёсткость и сила трения. Подвешенный брусок покоится: сила тяжести равна силе упругости, $mg = kx_0$, откуда $k/m = g/x_0$. На наклонной плоскости вдоль оси y ускорения нет, поэтому $N = mg\cos\alpha$ и сила трения скольжения

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg\cos\alpha = \mu k x_0 \cos\alpha = k\delta,$$
$$\delta = \mu x_0 \cos\alpha = \frac{1}{6}\cdot 32 \cdot \frac{3}{4} = 4 \text{ см}.$$

Величина δ — «трение, переведённое в сантиметры пружины»: пружина, растянутая или сжатая на δ относительно O, создаёт как раз силу $F_{\text{тр}}$. Это единственное число, которое понадобится дальше; $\sin\alpha$ в ответе не участвует.



Силы на брусок при движении вверх (в момент отпускания): тяжесть $m\vec{g}$, реакция $\vec{N}$, сила упругости $\vec{F}_{пр}$ вдоль склона вверх и трение $\vec{F}_{тр}$ вдоль склона вниз — против скорости. Длины стрелок — по расчёту; $\vec{F}_{тр}$ нарисована вдвое длиннее масштаба, чтобы её было видно.

2. Результирующая сила без трения. Точка O — положение равновесия при отсутствии трения, значит, в ней $k\Delta_0 = mg\sin\alpha$. В точке с координатой x пружина растянута на $\Delta_0 + x$, и вдоль оси x вместе с тяжестью действует

$$mg\sin\alpha - k(\Delta_0 + x) = -kx.$$

Без трения брусок колебался бы вокруг O с частотой $\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{g/x_0}$, а его энергия (пружина вместе с тяжестью) равнялась бы $kx^2/2$: те же слагаемые, что и в горизонтальной пружине, только отсчёт от O.

3. Движение вверх. Брусок едет против оси x, трение направлено вдоль x. Второй закон Ньютона в проекции на ось x (вдоль склона — чтобы N не вошла):

$$m\ddot{x} = -kx + k\delta = -k(x - \delta).$$

Это гармоническое колебание с той же частотой ω вокруг центра $x = +\delta$ — на 4 см ниже O. При движении вниз трение направлено против оси x: $m\ddot{x} = -k(x + \delta)$, центр $x = -\delta$ — на 4 см выше O. Колебание вокруг центра симметрично: скорость обращается в ноль в точке, зеркальной начальной относительно этого центра.

Пункт 1.

4. Первая остановка. Первое полуколебание идёт вверх вокруг центра $x = \delta$ из точки $x = A_0$. Конечная точка зеркальна начальной: $x_1 = 2\delta - A_0$. Расстояние до O:

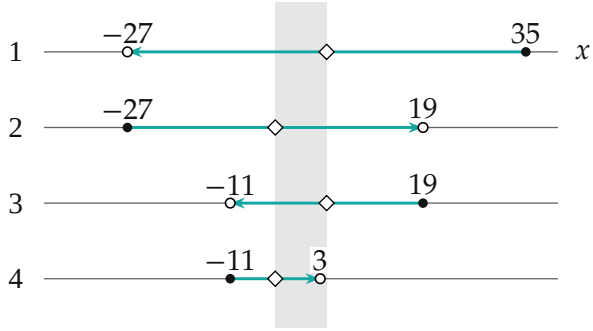
$$A_1 = |x_1| = A_0 - 2\delta = 35 - 8 = 27 \text{ см},$$

брусок оказывается по другую сторону от O — выше неё. Второй способ — закон изменения энергии для бруска от старта до остановки: работа

силы трения равна изменению энергии пружины с тяжестью,

$$-k\delta\,(A_0+A_1)=\frac{kA_1^2}{2}-\frac{kA_0^2}{2}\;\Rightarrow\;(A_0+A_1)\,(A_0-A_1-2\delta)=0$$
$$\Rightarrow\;A_0-A_1=2\delta,$$

путь трения равен A_0+A_1, потому что брусок прошёл от $x=A_0$ до $x=-A_1$. Результат тот же.



Четыре полуколебания. Чёрная точка — начало, белая — остановка, ромб — центр колебаний (при движении вверх он ниже O, при движении вниз — выше), серая полоса — зона застоя $|x|\le\delta$. Расстояние до O в точках остановки: 35, 27, 19, 11, 3 см.

Пункт 2.

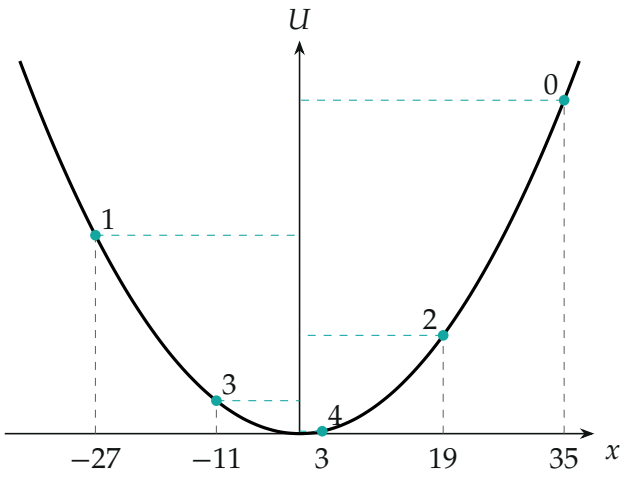
5. Каждое следующее полуколебание. Рассуждение шага 4 повторяется на каждом полуколебании: центр лежит на δ со стороны, откуда брусок едет, поэтому расстояние до O убывает на $2\delta=8$ см:

$$A_n=A_0-2n\delta:\qquad 35,\ 27,\ 19,\ 11,\ 3\text{ см}.$$

Остановка в точке с $|x|>\delta$ не окончательна: пружина тянет с силой $k|x|$, большей максимальной силы трения покоя $k\delta$ (силу трения покоя принимаем не больше μN), и брусок трогается обратно. Остановка в точке с $|x|\le\delta$ окончательна: пружина не сильнее трения, брусок остаётся. Зона застоя — полоса $|x|\le\delta=4$ см вокруг O.

Значения $A_1=27$, $A_2=19$, $A_3=11$ превышают 4 см — движение продолжается. Четвёртая остановка даёт $A_4=3$ см <4 см — брусок

остаётся. Знак: остановки чередуются — $+35$ (ниже O), -27 (выше), $+19$, -11, $+3$, поэтому четвёртая остановка — по ту же сторону, что и старт.



Энергия пружины с тяжестью $U = kx^2/2$ (парабола) и точки остановок с номерами $0, \ldots, 4$; пунктир влево показывает уровень энергии. Каждая следующая остановка лежит ниже на работу трения.

Обратите внимание: в зоне застоя брусок останавливается не потому, что «трение победило движение» вообще, а потому, что в этой точке сила упругости $k|x|$ не превосходит $k\delta$. До этого трение скольжения не останавливает тело, а лишь уменьшает размах на 2δ за полуколебание.

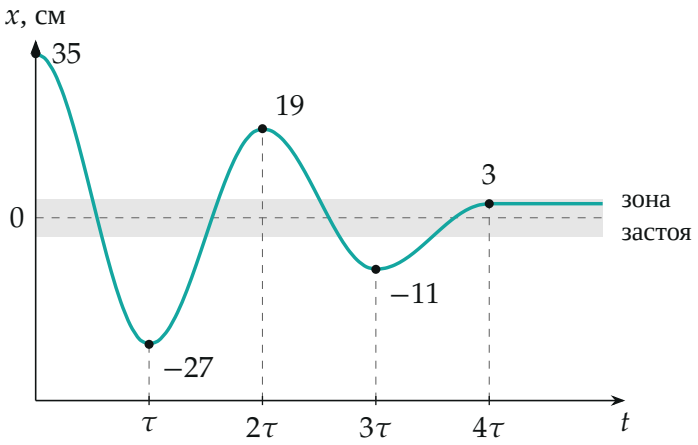
Пункт 3.

6. Длительность полуколебания. Каждое полуколебание — половина периода гармонического колебания вокруг своего центра с частотой $\omega = \sqrt{g/x_0}$: от одной точки остановки до зеркальной ей скорость обращается в ноль ровно за $T/2$, и от амплитуды это время не зависит. Постоянная сила трения сдвигает центр, но не меняет ω. Поэтому

$$\tau = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{x_0}{g}}.$$

7. Полное время. Всего четыре полуколебания — четвёртая остановка окончательна:

$$t = 4\tau = 4\pi\sqrt{\frac{x_0}{g}} = 4\pi\sqrt{\frac{0{,}32}{9{,}8}} \approx 2{,}3 \text{ с}.$$



Координата бруска $x(t)$ вдоль склона (вниз — плюс), $\tau \approx 0{,}57$ с. Центр колебаний чередуется ($+4$ и -4 см), размах убывает на 8 см за τ; после четвёртой остановки $x = 3$ см — график идёт горизонтально.

Проверка. Предел $\mu \to 0$: $\delta \to 0$, убыль $2\delta \to 0$, колебания не затухают, $A_1 = A_0$ — верно. Если бы $A_0 \le \delta$ ($A_0 \le 4$ см), брусок вообще не тронулся бы. Второй способ для пункта 2 — численное решение уравнения движения с сухим трением (шаг 10^{-6} с): остановки в точках -27, 19, -11, 3 см в моменты 0,57, 1,14, 1,70, 2,27 с — то же. Размерность: $\sqrt{x_0/g}$ — секунды. Смысл: трение превращает энергию пружины в теплоту, размах теряет по 8 см за каждый проход, и колебания обрываются за 2,3 с, а не затухают бесконечно, как при вязком трении.

Ответ. 1) 27 см; 2) 3 см (ниже точки O); 3) $t = 4\pi\sqrt{x_0/g} \approx 2{,}3$ с.