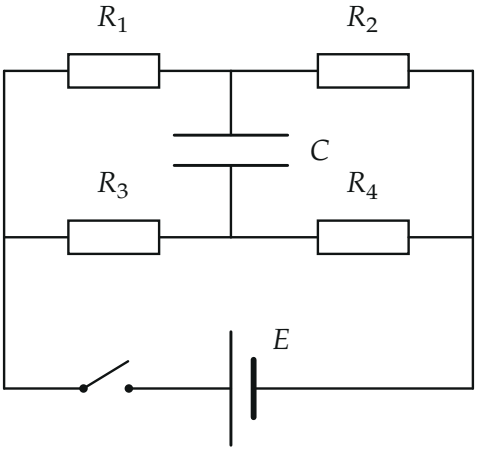
Цепь с конденсатором и ключом: установившийся режим и теплота

Задача 3. [Физтех 2016/17, 11 класс, задача 3] В цепи, схема которой показана на рисунке, все элементы можно считать идеальными, ЭДС батареи E, сопротивления резисторов $R_1 = r$, $R_2 = 4r$, $R_3 = 3r$, $R_4 = 2r$. До замыкания ключа ток в цепи отсутствовал. Ключ замыкают, а затем через большой промежуток времени ключ размыкают.

1. Найти напряжение U на конденсаторе в установившемся режиме при замкнутом ключе.
2. Найти количество теплоты Q, выделившейся на резисторе R_1 после размыкания ключа.
3. Найти ток I_0, текущий через конденсатор сразу после замыкания ключа.



▲ **Решение. Что происходит.** Цепь — две ветви от левого узла к правому: верхняя R_1, R_2 и нижняя R_3, R_4, а конденсатор соединяет их средние точки. В установившемся режиме при замкнутом ключе ток через конденсатор не идёт, он как разрыв, и напряжение на нём — разность потенциалов средних точек ветвей. После размыкания батарея отключена, и конденсатор разряжается через резисторы, вся его энергия уходит

в теплоту. Сразу после замыкания конденсатор не заряжен, напряжение на нём равно нулю — он как проводник. Идея: для каждого момента заменить конденсатор разрывом или проводником и посчитать цепь постоянного тока.

Обозначения. Потенциал правого узла (отрицательный вывод батареи — короткая пластина) примем за нуль, тогда потенциал левого узла при замкнутом ключе E. φ_a и φ_b — потенциалы верхней и нижней средних точек (к ним присоединён конденсатор), $U = \varphi_a - \varphi_b$.

Пункт 1.

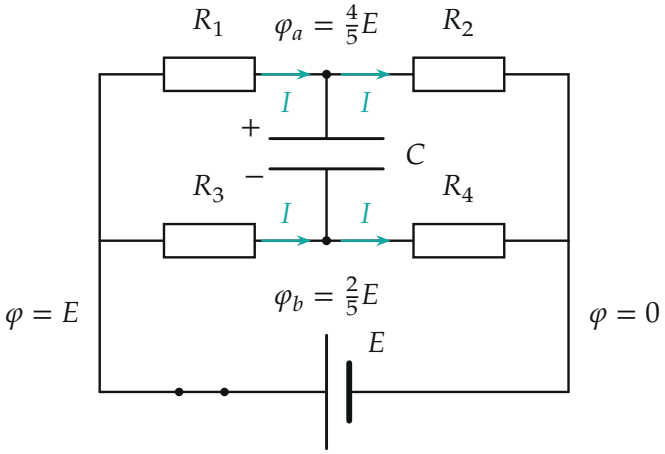
1. Токи в ветвях. В установившемся режиме через конденсатор ток не идёт, поэтому через R_1 и R_2 течёт один и тот же ток, а через R_3 и R_4 — другой. Каждая ветвь — два резистора последовательно, и к каждой приложено напряжение батареи (закон Ома для ветви; батарея идеальная):

$$I_{12} = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{E}{5r}, \qquad I_{34} = \frac{E}{R_3 + R_4} = \frac{E}{5r}.$$

2. Потенциалы средних точек. Потенциал падает вдоль тока на каждом резисторе на IR (закон Ома для участка). От левого узла (потенциал E):

$$\varphi_a = E - I_{12}R_1 = \frac{4}{5}E, \qquad \varphi_b = E - I_{34}R_3 = \frac{2}{5}E.$$

Проверка от правого узла (потенциал нуль): $\varphi_a = I_{12}R_2 = \frac{4}{5}E$, $\varphi_b = I_{34}R_4 = \frac{2}{5}E$ — то же.



Установившийся режим: токи в ветвях равны $I = E/(5r)$, потенциалы средних точек $\frac{4}{5}E$ и $\frac{2}{5}E$. Верхняя пластина заряжена положительно.

3. Напряжение на конденсаторе. Конденсатор присоединён между точками a и b:

$$U = \varphi_a - \varphi_b = \frac{4}{5}E - \frac{2}{5}E = \frac{2}{5}E.$$

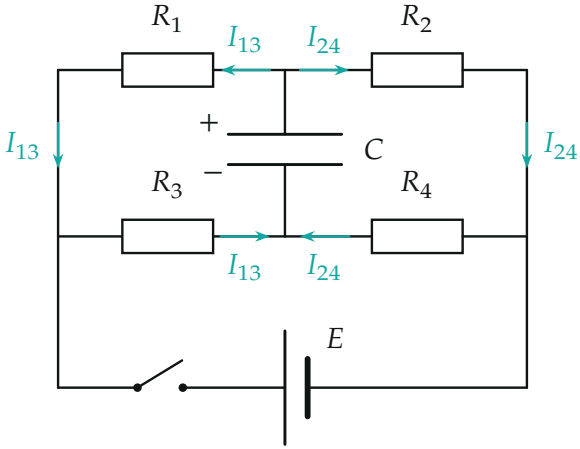
Верхняя обкладка положительна: $\varphi_a > \varphi_b$. Заряд конденсатора $q = CU = \frac{2}{5}CE$.

Пункт 2.

4. Куда уходит энергия. Ключ размыкаем в момент, когда конденсатор заряжен до U. Заряд мгновенно измениться не может, поэтому начальное напряжение на нём то же U. Батарея отключена: левый узел соединён только с R_1 и R_3, правый — с R_2 и R_4, и разряжаться конденсатору больше некуда, кроме двух путей: R_1, R_3 последовательно (через левый узел) и R_2, R_4 последовательно (через правый узел). Источников нет, поэтому вся энергия конденсатора

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{C}{2} \cdot \frac{4}{25}E^2 = \frac{2}{25}CE^2$$

в итоге превращается в теплоту (закон сохранения энергии; в конце конденсатор разряжен).



После размыкания: конденсатор разряжается по двум параллельным путям — R_1 и R_3 (ток I_{13}), R_2 и R_4 (ток I_{24}). Через батарею ток не идёт.

5. Как энергия делится между путями. Оба пути присоединены к одному конденсатору и в каждый момент находятся под одним и тем же напряжением $u(t)$. Мощность на пути $P = u^2/R$, поэтому за всё время теплота обратно пропорциональна сопротивлению пути:

$$\frac{Q_{13}}{Q_{24}} = \frac{R_2 + R_4}{R_1 + R_3} = \frac{6r}{4r} = \frac{3}{2}, \qquad Q_{13}+Q_{24} = W \Rightarrow Q_{13} = \frac{3}{5}W = \frac{6}{125}CE^2.$$

6. Теплота на R_1. R_1 и R_3 соединены последовательно — ток один, теплота делится пропорционально сопротивлениям:

$$Q = Q_{13}\frac{R_1}{R_1 + R_3} = \frac{1}{4}\cdot\frac{6}{125}CE^2 = \frac{3}{250}CE^2.$$

Пункт 3.

7. Конденсатор как проводник. Сразу после замыкания конденсатор не заряжен, $U = 0$: точки a и b имеют одинаковый потенциал, и конденсатор работает как проводник. Цепь — параллельные R_1 и R_3, последовательно с ними параллельные R_2 и R_4:

$$R_{13} = \frac{R_1R_3}{R_1 + R_3} = \frac{3}{4}r, \qquad R_{24} = \frac{R_2R_4}{R_2 + R_4} = \frac{4}{3}r, \qquad R = R_{13}+R_{24} = \frac{25}{12}r.$$

Ток батареи $I = E/R = \dfrac{12}{25}\dfrac{E}{r}$ — обозначим $i = \dfrac{E}{25r}$, тогда $I = 12i$.

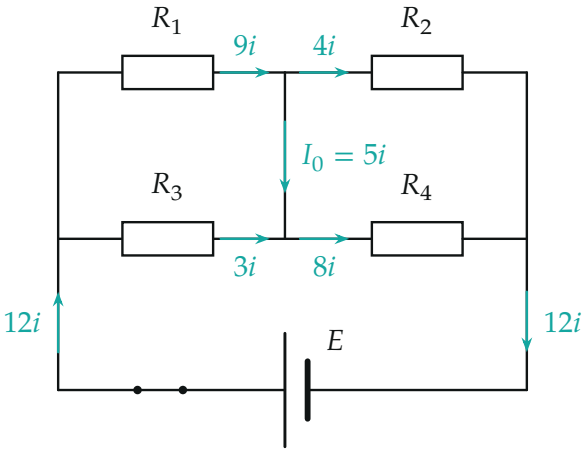
8. Токи в резисторах. Ток от левого узла делится между R_1 и R_3 обратно пропорционально сопротивлениям, от точек a и b к правому узлу — между R_2 и R_4:

$$I_1 = I\frac{R_3}{R_1+R_3} = 9i, \quad I_3 = I\frac{R_1}{R_1+R_3} = 3i,$$
$$I_2 = I\frac{R_4}{R_2+R_4} = 4i, \quad I_4 = I\frac{R_2}{R_2+R_4} = 8i.$$

9. Ток через конденсатор. Первый закон Кирхгофа для точки a: в неё приходит I_1, уходит I_2, остальное идёт через конденсатор вниз:

$$I_0 = I_1 - I_2 = 9i - 4i = 5i = \frac{1}{5}\frac{E}{r}.$$

Для точки b: $I_3 + I_0 = 8i = I_4$ — сходится.

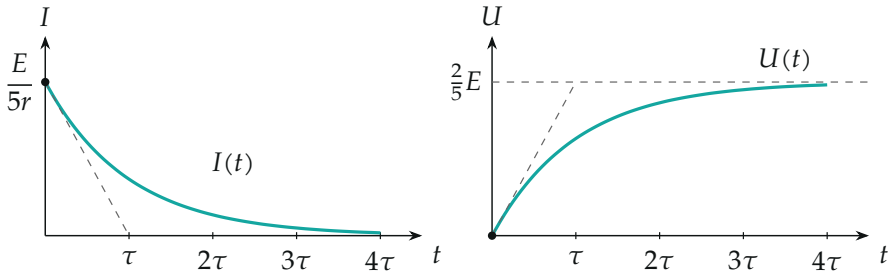


Сразу после замыкания: конденсатор заменён проводником; токи в единицах $i = E/(25r)$. В точке a: $9i = 4i + 5i$.

Качественная картина. Дальше ток через конденсатор убывает, а напряжение растёт: конденсатор заряжается, пока U не станет $\frac{2}{5}E$. Для источника с резисторами конденсатор «видит» сопротивление $R_{эк} = R_1 \parallel$

$R_2 + R_3 \parallel R_4 = \frac{4}{5}r + \frac{6}{5}r = 2r$ (источник идеальный, узлы батареи — точки постоянного потенциала), поэтому время зарядки $\tau = R_{\text{эк}}C = 2rC$:

$$I_C(t) = I_0\, e^{-t/\tau}, \qquad U(t) = \frac{2}{5}E\left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$



Ток через конденсатор и напряжение на нём после замыкания ключа, $\tau = 2rC$. Касательная в нуле отсекает на оси времени τ.

Обратите внимание: в пункте 2 теплоту на R_1 нельзя считать как «половину» или «долю от W» по сопротивлениям всей цепи: ток через R_1 и R_3 общий, а через R_2, R_4 — другой, и между путями энергия делится по обратным сопротивлениям, а внутри пути — по прямым.

Проверка. Второй способ для пункта 3: ток начала зарядки равен $U_\infty/R_{\text{эк}} = \dfrac{2E/5}{2r} = \dfrac{E}{5r}$ — совпало с $5i$. Второй способ для пункта 2: на пути $R_1 + R_3 = 4r$ напряжение $u = Ue^{-t/\tau'}$, $\tau' = C \cdot \dfrac{4r \cdot 6r}{4r + 6r} = 2{,}4\,rC$, ток $u/4r$:

$$Q = \int_0^\infty \left(\frac{u}{4r}\right)^2 r\,dt = \frac{U^2}{16r} \cdot \frac{\tau'}{2} = \frac{U^2 \cdot 2{,}4\,rC}{32\,r} = 0{,}075\,CU^2 = \frac{3}{250}\,CE^2.$$

Размерность: CE^2 — энергия, E/r — ток; при $C \to 0$ теплоты нет. Смысл: конденсатор сначала ведёт себя как проводник, потом заряжается до $\frac{2}{5}E$, а при размыкании вся энергия $\frac{2}{25}CE^2$ уходит в резисторы, на R_1 — $\frac{3}{50}$ от неё.

Ответ. 1) $U = \dfrac{2}{5}E$; 2) $Q = \dfrac{3}{250}CE^2$; 3) $I_0 = \dfrac{E}{5r}$.