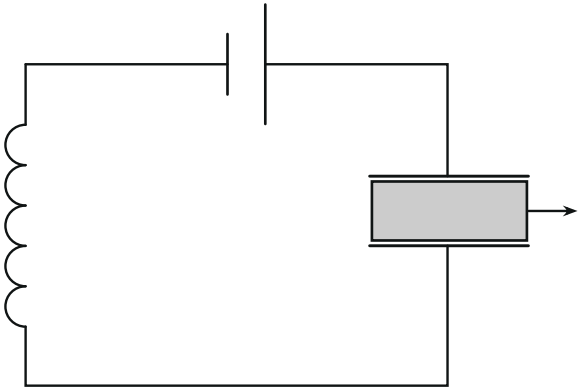
Колебательный контур: диэлектрик быстро убирают из конденсатора

Задача 4. [Физтех 2016/17, 11 класс, задача 4] Источник с ЭДС E подключён через катушку с индуктивностью L к плоскому конденсатору (см. рис.). Источник и катушка идеальные. В конденсаторе находится пластина из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 3$, полностью заполняющая конденсатор. Ёмкость пустого конденсатора C. Режим в цепи установился. Пластину быстро извлекают из конденсатора так, что заряд конденсатора не успевает измениться.

1. Найти напряжение на конденсаторе сразу после извлечения пластины.
2. Найти максимальный ток в цепи после извлечения пластины.



▲ **Решение. Что происходит.** Контур из идеального источника, идеальной катушки и конденсатора. Пока пластина на месте и режим установился, ток постоянный, значит, напряжение на катушке нулевое, а раз ток через конденсатор не идёт — тока нет совсем, и напряжение на конденсаторе равно ЭДС. Пластину выдёргивают так быстро, что заряд остаётся прежним, но ёмкость падает в ε раз, и напряжение на конденсаторе подскакивает выше ЭДС. Теперь ничто не уравновешивает: на катушке появляется напряжение $E - U_C$, ток нарастает, и в контуре

начинаются колебания. Класс задачи — LC-контур с источником: ток максимален в тот момент, когда напряжение на катушке проходит через нуль. Главная идея — найти этот момент и применить закон сохранения энергии с учётом работы источника (второй способ — сами колебания).

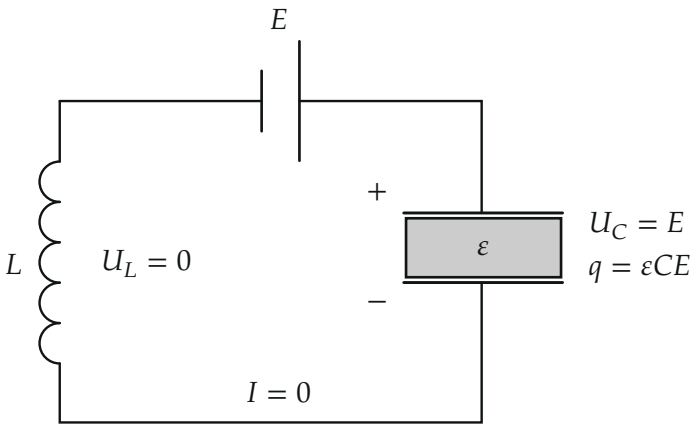
Обозначения. q — заряд верхней пластины, $U_C = q/C_{\text{тек}}$ — напряжение на конденсаторе, $I = \dot{q}$ — ток в контуре; положительный — в сторону зарядки конденсатора (по часовой стрелке на рисунке: источник толкает ток вправо по верхнему проводу). Длинная пластина батареи — положительный полюс, он соединён с верхней обкладкой.

Пункт 1.

1. Установившийся режим до извлечения. Ток в цепи постоянен, поэтому ЭДС самоиндукции катушки $L\,dI/dt = 0$ — напряжение на ней нулевое. Второй закон Кирхгофа для контура (идеальный источник, сопротивление проводов нулевое): $E = U_L + U_C$, откуда $U_C = E$. Ёмкость с диэлектриком εC, заряд

$$q_0 = \varepsilon C \cdot E = 3CE,$$

ток равен нулю (постоянный ток через конденсатор не идёт).

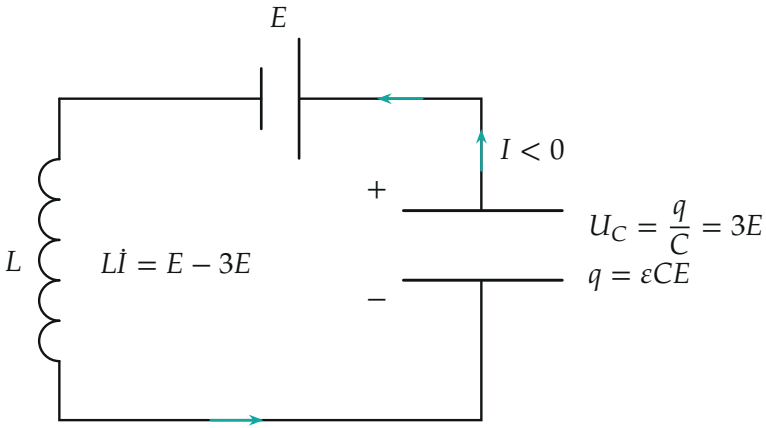


До извлечения пластины: ток в контуре нулевой, напряжение на катушке нулевое, на конденсаторе — E, заряд $3CE$.

2. Что происходит при быстром извлечении. Ток через катушку не может измениться скачком (иначе ЭДС самоиндукции была бы бесконечной), а раньше он был нулевым — значит, за время извлечения заряд через катушку не течёт, и заряд конденсатора $q_0 = 3CE$ остаётся на обкладках. Ёмкость становится равной C:

$$U_1 = \frac{q_0}{C} = \frac{3CE}{C} = \varepsilon E = 3E.$$

Напряжение на конденсаторе утроилось — работа, которую совершает внешняя сила против притяжения обкладок к диэлектрику, пошла в энергию конденсатора. Знак: $U_1 > E$, поэтому на катушке теперь $L\dot{I} = E - U_1 = -2E$: ток начнёт расти в направлении против ЭДС — от конденсатора через катушку в источник.



Сразу после извлечения: заряд прежний, ёмкость меньше — напряжение на конденсаторе 3E больше ЭДС. Конденсатор разряжается в источник, ток против ЭДС.

Пункт 2.

3. В какой момент ток максимален. Второй закон Кирхгофа для контура в произвольный момент после извлечения: $E = L\dot{I} + U_C$, то есть $L\dot{I} = E - U_C$. Ток максимален (а точнее, максимален по модулю), когда

его производная равна нулю — то есть когда $U_C = E$. Заряд при этом

$$q_* = CE.$$

4. Энергия — первый способ. Рассмотрим систему конденсатор + катушка + источник от момента сразу после извлечения до момента максимального тока. Через источник за это время прошёл заряд $\Delta q = q_* - q_0 = CE - 3CE = -2CE$ (заряд ушёл с верхней пластины и дошёл до положительного полюса источника). Работа источника

$$A = E\,\Delta q = -2CE^2,$$

она отрицательная: источник поглощает энергию — его подзаряжает конденсатор. Закон сохранения энергии: энергия конденсатора в начале + работа источника = энергия конденсатора в конце + энергия катушки, потерь нет (идеальные элементы):

$$\frac{q_0^2}{2C} + A = \frac{q_*^2}{2C} + \frac{LI_m^2}{2} \;\Rightarrow\; \frac{9}{2}CE^2 - 2CE^2 = \frac{1}{2}CE^2 + \frac{LI_m^2}{2} \;\Rightarrow\; \frac{LI_m^2}{2} = 2CE^2.$$

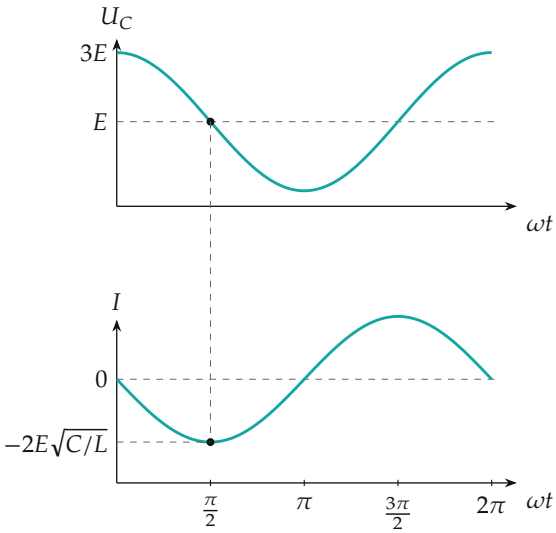
Отсюда

$$I_m = 2E\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

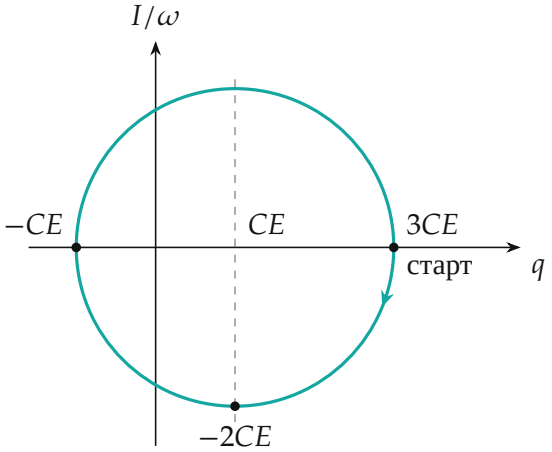
5. Колебания — второй способ. Из $L\dot I = E - q/C$ и $I = \dot q$ получаем $L\ddot q = E - q/C$, то есть

$$\ddot q = -\omega^2\,(q - CE), \qquad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Это гармонические колебания заряда вокруг $q = CE$ (там $U_C = E$) с амплитудой $q_0 - CE = (\varepsilon - 1)CE = 2CE$ и нулевой начальной скоростью: $q = CE + 2CE\cos\omega t$, $I = -2CE\omega\sin\omega t$. Максимум модуля тока — амплитуда скорости: $|I|_{\max} = 2CE\omega = 2E\sqrt{C/L}$. Тот же ответ.



Напряжение на конденсаторе $U_C = E(1+2\cos\omega t)$ *и ток* $I = -2E\sqrt{C/L}\,\sin\omega t$. *Модуль тока максимален при* $\omega t = \pi/2$, *когда* $U_C = E$.



Тот же процесс на плоскости $(q, I/\omega)$: *окружность радиуса* $2CE$ *с центром в точке* $q = CE$. *Движение начинается в точке* $q = 3CE$ *и идёт по часовой стрелке; наибольший модуль тока — в нижней точке.*

Обратите внимание: в законе сохранения энергии нельзя забыть работу источника. Без неё получается $\frac{9}{2}CE^2 = \frac{1}{2}CE^2 + \frac{LI^2}{2}$, то есть $I =$

$2\sqrt{2}\,E\sqrt{C/L}$ — неверный ответ: источник не стоит в стороне, он принимает $2CE^2$ энергии.

Проверка. Размерность: $\sqrt{C/L}$ — обратное сопротивление ($L/C = \text{Ом}^2$), $E\sqrt{C/L}$ — ампер. Предел $\varepsilon \to 1$: пластина ничего не меняла, $U_1 = E$, $I_m = 0$ — формулы дают это. Два способа дали один ответ. Смысл: избыток заряда на конденсаторе стекает в источник, и на этом пути ток разгоняется до значения $2E\sqrt{C/L}$, затем контур колеблется около равновесного напряжения E.

Ответ. 1) $U_1 = \varepsilon E = 3E$; 2) $I_m = (\varepsilon - 1)E\sqrt{C/L} = 2E\sqrt{C/L}$.