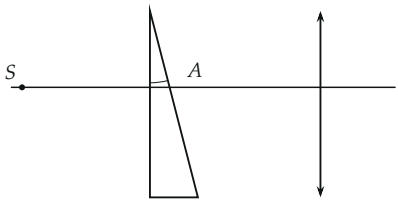
Линза и тонкая призма на оси

Задача 5. [Физтех 2016/17, 11 класс, задача 5] Тонкая линза с фокусным расстоянием $F = 20$ см создаёт действительное изображение точечного источника света S, находящегося на главной оптической оси на расстоянии $d = 60$ см от линзы. Между источником и линзой на расстоянии $L = 30$ см от линзы помещают (см. рис.) тонкую стеклянную призму с малым преломляющим углом $A = 0{,}04$ рад при вершине. Призма изготовлена из стекла с показателем преломления $n = 1{,}5$.

1. Найти расстояние f между линзой и изображением до помещения призмы.
2. На какой угол δ отклонится после прохождения призмы луч, идущий от источника вдоль главной оптической оси линзы?
3. Найти смещение изображения после помещения призмы.

Указание: при малых углах α справедливо $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$.



▲ **Решение. Что происходит.** Тонкая призма с малым углом при вершине отклоняет любой падающий на неё почти по нормали луч на один и тот же угол $\delta = (n-1)A$ в сторону основания. Для линзы это значит, что лучи от источника после призмы идут так, будто источник сместился перпендикулярно оси — в сторону вершины призмы — на $h = \delta \cdot a$, где a — расстояние от источника до призмы. А линза даёт изображение смещённого источника по обычной формуле, с поперечным увеличением f/d. Главная идея — заменить призму «мнимым смещением источника» и воспользоваться формулой линзы; в конце проверим тем же способом, проследив один луч насквозь.

Обозначения. S — источник, S^* — его изображение без призмы, S_1 — кажущееся положение источника с призмой, S_1^* — изображение S_1; f

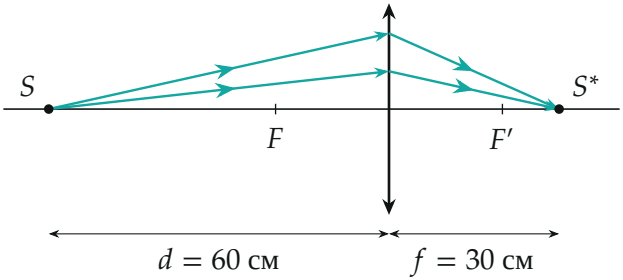
— расстояние от линзы до S^*, H — смещение изображения. Расстояние от призмы до линзы $L = 30$ см, до источника $a = d - L = 30$ см (призма стоит посередине). Углы малые, $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$.

Пункт 1.

1. Формула тонкой линзы. Источник на оси на расстоянии $d > F$, изображение действительное:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{dF}{d-F} = \frac{60 \cdot 20}{60 - 20} = 30 \text{ см}.$$

Поперечное увеличение $\Gamma = f/d = \frac{1}{2}$: изображение вдвое меньше предмета и перевёрнуто — сдвиг предмета вверх даёт сдвиг изображения вниз.



Линза без призмы: лучи от S сходятся в S^* на расстоянии $f = 30$ см. Масштаб по вертикали условный.

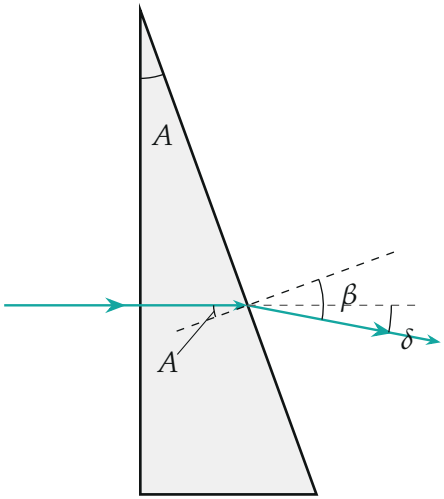
Пункт 2.

2. Ход луча в призме. Осевой луч падает на первую грань призмы по нормали и там не преломляется. Вторую грань он встречает под углом падения A: стороны этого угла перпендикулярны сторонам угла при вершине. Закон преломления на второй грани (из стекла в воздух), угол преломления β:

$$n \sin A = \sin\beta \;\Rightarrow\; \beta \approx nA.$$

Луч отклоняется на угол между направлением входа и выхода: $\delta = \beta - A = (n-1)A$ — в сторону основания:

$$\delta = (n-1)A = 0{,}5 \cdot 0{,}04 = 0{,}02 \text{ рад}.$$



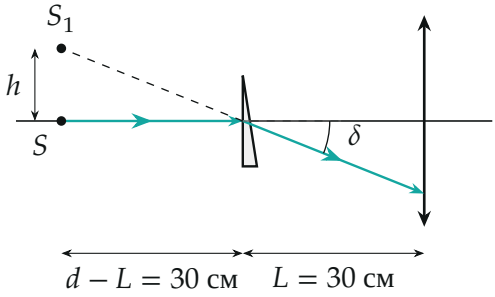
Осевой луч в тонкой призме (угол при вершине на рисунке увеличен до 20° для наглядности; при $n = 1{,}5$ точный расчёт даёт $\beta = 30{,}9°$, $\delta = 10{,}9° \approx (n-1)A$). Нормаль к второй грани — пунктир.

Пункт 3.

3. Кажущийся источник. После призмы все лучи от S повёрнуты на δ вниз, то есть идут так, будто выходят из точки S_1 — выше оси. Луч, вышедший из призмы под углом δ к оси, в точке плоскости источника, лежащей на расстоянии a позади призмы, находился бы выше оси на

$$h = a\,\delta = (d - L)\,\delta = 30 \cdot 0{,}02 = 0{,}6 \text{ см}.$$

(Малые углы: $\operatorname{tg}\delta \approx \delta$. Само расстояние от S_1 до линзы отличается от d только на величину второго порядка малости, и им пренебрегаем.)

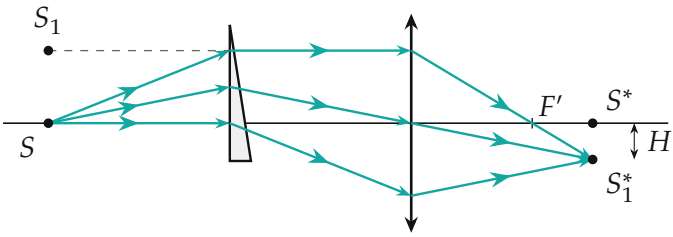


Осевой луч после призмы идёт вниз под углом δ; его продолжение назад (пунктир) приходит в точку S_1 на высоте h над осью. Масштаб по вертикали увеличен в 20 раз.

4. Изображение кажущегося источника. Источник S_1 смещён поперёк оси на h, расстояние до линзы осталось d, поэтому для него справедливо то же увеличение f/d, но смещение изображения направлено в противоположную сторону:

$$H = h\frac{f}{d} = (d-L)\,\delta\frac{f}{d} = \frac{(d-L)(n-1)AF}{d-F} = \frac{30\cdot 0{,}5\cdot 0{,}04\cdot 20}{40} = 0{,}3\text{ см}.$$

Изображение смещается вниз — в сторону основания призмы — на 0,3 см.



Три луча от S через призму и линзу: осевой, идущий через оптический центр линзы и идущий после призмы параллельно оси (он проходит через фокус F'). Все сходятся в S_1^*, смещённой вниз от S^* на H. Масштаб по вертикали увеличен в 20 раз.

Проверка. Второй способ — проследим сам осевой луч. После призмы он идёт под углом $-\delta$ и на линзе (расстояние $L = 30$ см от призмы) находится на высоте $y = -\delta L = -0{,}6$ см. Тонкая линза уменьшает наклон луча на y/F: новый наклон $-\delta - y/F = -0{,}02 + 0{,}03 = +0{,}01$. До плоскости изображения $f = 30$ см луч поднимется на $0{,}01\cdot 30 = 0{,}3$ см и окажется на высоте $-0{,}6+0{,}3 = -0{,}3$ см — то же смещение $H = 0{,}3$ см, потому что этот луч проходит через S_1^*. Предельные случаи: призма у самого источника ($L = d$) даёт $H = 0$ — источник не сместился; призма вплотную к линзе ($L = 0$) даёт $H = f\delta = 0{,}6$ см — линза работает под небольшим наклоном, и изображение уезжает на $f\delta$. Размерность:

$(d - L)\,\delta F/(d - F)$ — сантиметры. Смысл: призма слабо уводит все лучи вниз на один угол, и изображение смещается вниз на 0,3 см — вдвое меньше, чем кажущийся источник (на 0,6 см), потому что $\Gamma = \frac{1}{2}$.

Обратите внимание: призма смещает не изображение, а источник — каждая линза затем преобразует это смещение по своей формуле, поэтому в ответ входит f/d, а не просто h.

Ответ. 1) $f = 30$ см; 2) $\delta = 0{,}02$ рад; 3) $H = 0{,}3$ см (вниз, в сторону основания призмы).