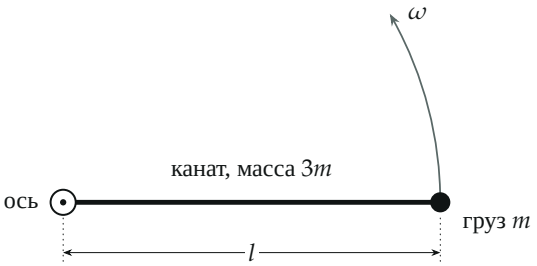
Груз на конце вращающегося однородного каната

Задача 1. [Физтех 2016/17, 11 класс, варианты 7–10, задача 1] Груз массой $m = 100$ г прикреплён к концу однородного каната массой $3m$ и длиной $l = 70$ см. Другой конец каната прикреплён к вертикальной оси. Канат и груз вращаются вокруг оси, скользя по гладкой горизонтальной поверхности. Частота вращения $n = 1$ с$^{-1}$. Размер груза много меньше длины каната.

1. Найти минимальную силу натяжения каната.
2. Во сколько раз максимальная сила натяжения каната больше минимальной?



Вид сверху: канат с грузом вращается вокруг вертикальной оси, которая перпендикулярна плоскости рисунка.

▲ **Решение. Что происходит.** Канат с грузом вращается с постоянной угловой скоростью по гладкой горизонтальной поверхности. Сила тяжести каждого элемента уравновешена реакцией поверхности, трения нет, поэтому в горизонтальной плоскости на элемент действует только натяжение каната, направленное вдоль него. Оно и сообщает каждому элементу центростремительное ускорение $\omega^2 r$, где r — расстояние от оси. Ускорение растёт с расстоянием, а натяжение в сечении тянет к оси «всё, что лежит дальше», поэтому оно минимально у груза и максимально у оси. Ключевой закон — второй закон Ньютона: для груза, для малого элемента каната и (вторым способом) для каната целиком.

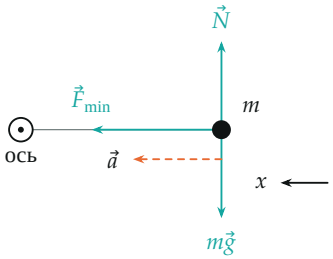
Обозначения. $\omega = 2\pi n$ — угловая скорость; r — расстояние от оси; $T(r)$ — сила натяжения в сечении на расстоянии r от оси; $M = 3m$ — масса каната; $F_{\min} = T(l)$ и $F_{\max} = T(0)$. Ось x направляем вдоль каната к оси вращения: ускорение каждого элемента лежит на ней.

Пункт 1.

1. Груз. Запишем второй закон Ньютона для груза в проекции на ось x. Груз мал, поэтому его ускорение $\omega^2 l$ направлено к оси. Горизонтально на груз действует только натяжение каната у самого груза, то есть сила $F_{\min} = T(l)$:

$$F_{\min} = m\omega^2 l = m(2\pi n)^2 l = 0{,}1 \cdot (2\pi)^2 \cdot 0{,}7 \approx 2{,}8 \text{ Н}.$$

Вертикальные силы $m\vec{g}$ и $\vec{N}$ компенсируют друг друга и в проекцию на ось x не входят.



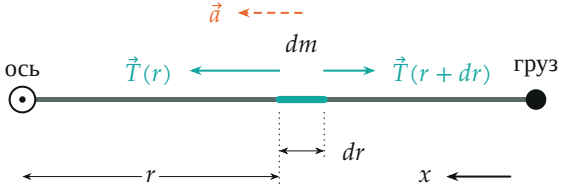
Силы на груз: в горизонтальной плоскости — только натяжение каната; ускорение $\vec{a}$ направлено к оси.

Пункт 2.

2. Малый элемент каната. Канат однороден, поэтому элемент длиной dr на расстоянии r от оси имеет массу $dm = \dfrac{3m}{l}\,dr$. Внутренний сосед тянет его к оси с силой $T(r)$, внешний — от оси с силой $T(r+dr)$. Запишем второй закон Ньютона для элемента в проекции на ось x:

$$T(r) - T(r+dr) = dm\,\omega^2 r = \frac{3m\omega^2}{l}\,r\,dr.$$

Слева стоит убыль натяжения при сдвиге на dr от оси, то есть $-dT$. Значит, натяжение убывает по мере удаления от оси: $dT = -\dfrac{3m\omega^2}{l}\,r\,dr$.



Элемент каната (бирюзовый, увеличен): внутренний сосед тянет его к оси сильнее, чем внешний от оси; разность и есть $dm\,\omega^2 r$.

3. Натяжение в любом сечении. Найдём $T(r)$: сложим малые убыли от сечения r до конца каната, то есть от r до l. На конце, у груза, натяжение уже известно: $T(l) = m\omega^2 l$.

$$T(r) - T(l) = \frac{3m\omega^2}{l}\int_r^l s\,ds = \frac{3m\omega^2}{2l}\,(l^2 - r^2),$$

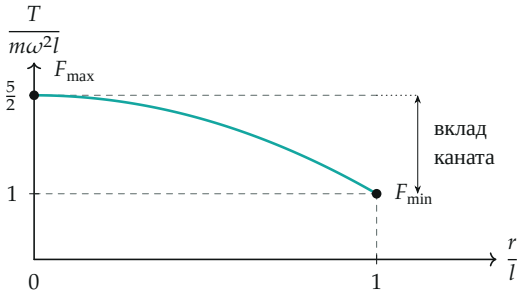
$$T(r) = m\omega^2 l + \frac{3m\omega^2}{2l}\,(l^2 - r^2).$$

4. Наибольшее натяжение — у оси, при $r = 0$:

$$F_{\max} = m\omega^2 l + \frac{3}{2}\,m\omega^2 l = \frac{5}{2}\,m\omega^2 l \approx 6{,}9\ \text{Н}, \qquad \frac{F_{\max}}{F_{\min}} = \frac{5}{2}.$$

Добавка $\frac{3}{2}\,m\omega^2 l$ — вклад каната: у оси натяжение тянет к оси и груз, и весь канат.

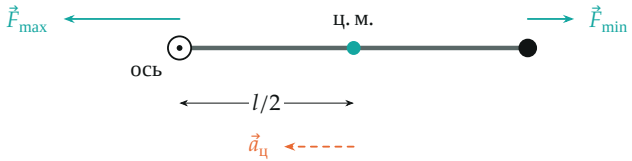
График: парабола, натяжение убывает от оси к грузу.



Натяжение вдоль каната: $T(0) = F_{\max} = \frac{5}{2}\,m\omega^2 l$ у оси, $T(l) = F_{\min} = m\omega^2 l$ у груза.

5. Тот же результат вторым способом. Весь канат — тело массой $M = 3m$ с центром масс на середине, на расстоянии $l/2$ от оси. Ускорение центра масс $\omega^2\, l/2$, направлено к оси. На канат по оси x действуют: у оси — сила $F_{\max}$ к оси; у груза — сила $F_{\min}$ от оси (по третьему закону Ньютона: канат тянет груз к оси с силой $F_{\min}$, груз тянет канат от оси с такой же). Второй закон Ньютона для каната как целого:

$$F_{\max} - F_{\min} = M\,\omega^2\,\frac{l}{2} = \frac{3}{2}\,m\omega^2 l \quad\Longrightarrow\quad \frac{F_{\max}}{F_{\min}} = 1 + \frac{M}{2m} = \frac{5}{2}.$$



Канат как целое: две внешние силы вдоль каната; центр масс однородного каната — на его середине.

Обратите внимание: ускорение каната как целого равно ускорению его центра масс $\omega^2\, l/2$, а не ускорению конца $\omega^2 l$; элементы каната ускоряются по-разному, и брать для всего каната $M\omega^2 l$ нельзя. Поэтому $F_{\max} \neq F_{\min} + M\omega^2 l$.

Проверка. Размерность: $m\omega^2 l$ — килограмм на секунду в минус второй на метр, то есть ньютон. Предел: масса каната $M \to 0$ даёт $F_{\max} \to F_{\min}$ (отношение $1 + M/2m \to 1$) — невесомый канат везде натянут одинаково. Оба способа дали отношение $\frac{5}{2}$; оно зависит только от отношения масс, а m, l, n нужны лишь для $F_{\min}$.

Ответ. 1) $F_{\min} = m(2\pi n)^2 l \approx 2{,}8$ Н; 2) $\dfrac{F_{\max}}{F_{\min}} = \dfrac{5}{2}$ ($F_{\max} \approx 6{,}9$ Н).