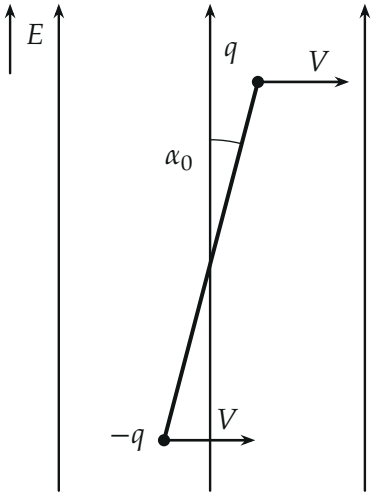
Электрический диполь влетает в однородное поле

Задача 3. [Физтех 2016/17, 11 класс, варианты 7–10, задача 3] В однородное электрическое поле напряжённостью E влетает система из двух небольших шариков массой m, один из которых несёт заряд $q > 0$, другой — противоположный заряд $-q$ (см. рис.). Шарики соединены невесомой твёрдой незаряженной спицей длины l. В некоторый момент шарики имели одинаковую скорость V, перпендикулярную силовым линиям поля, а спица составляла малый угол α_0 с силовыми линиями (и угол $\frac{\pi}{2} - \alpha_0$ с направлением скорости).



1. Через какое минимальное время спица вернётся в положение, которое параллельно начальному?
2. Найти максимальную скорость шарика с зарядом q.
3. Найти угловую скорость вращения спицы в моменты, когда она будет составлять угол $\alpha = \alpha_0/3$ с направлением поля.

Действием силы тяжести пренебречь. Скорость V намного меньше скорости света.

▲ **Решение. Что происходит.** Два шарика с зарядами q и $-q$ — это электрический диполь в однородном поле. Сумма внешних сил на систему

равна $qE - qE = 0$, поэтому центр масс движется равномерно со скоростью V, а поле только поворачивает диполь вокруг центра масс, стараясь выстроить его вдоль поля. Для малого угла такой поворот — гармонические колебания спицы. Скорость каждого шарика — сумма скорости центра масс и скорости вращения вокруг него. Ключевые идеи: центр масс отделяется от вращения; для вращения — уравнение моментов, затем энергия.

Обозначения. C — центр масс (середина спицы, шарики одинаковы); α — угол спицы с направлением поля, $\alpha(0) = \alpha_0$; I — момент инерции системы относительно оси, проходящей через C перпендикулярно плоскости рисунка; Ω — частота малых колебаний; $u = \Omega\alpha_0 l/2$ — наибольшая скорость шарика относительно C. Угол $\alpha_0 \ll 1$, поэтому $\sin\alpha \approx \alpha$.

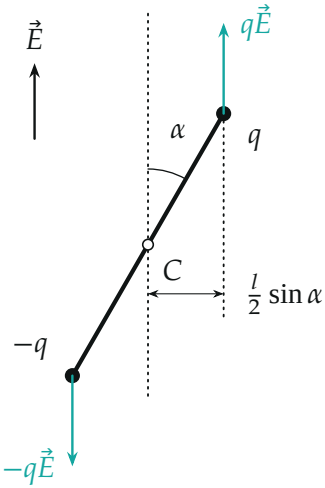
Пункт 1.

1. Центр масс. Второй закон Ньютона для системы из двух шариков: $2m\vec{a}_C = q\vec{E} + (-q\vec{E}) = 0$. Скорость центра масс постоянна и равна V, система отсчёта, связанная с C, инерциальна. Перейдём в неё: вращение идёт вокруг неподвижной точки, а скорость V из задачи о вращении уходит. Шарики имели одинаковые скорости V, то есть в системе отсчёта центра масс оба были неподвижны: в начальный момент угловая скорость спицы равна нулю, $\dot{\alpha}(0) = 0$.

2. Момент сил относительно C**.** Сила на заряд $+q$ равна $q\vec{E}$ (вверх), на заряд $-q$ — $-q\vec{E}$ (вниз); плечо каждой силы относительно C равно $(l/2)\sin\alpha$. Оба момента поворачивают спицу в одну сторону — к направлению поля, поэтому суммарный момент по модулю

$$M = 2 \cdot qE \cdot \frac{l}{2}\sin\alpha = qEl\sin\alpha$$

и направлен так, чтобы уменьшить α.



Силы поля на диполь (угол α для наглядности увеличен). Линии действия сил отстоят от C на $(l/2)\sin\alpha$, оба момента возвращают спицу к полю.

3. Уравнение вращения. Момент инерции системы относительно оси через C: $I = 2m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{2}$ (спица невесомая). Запишем основное уравнение динамики вращения: $I\ddot{\alpha} = -M$ (знак «минус»: момент уменьшает α). Подставим M и учтём $\sin\alpha \approx \alpha$:

$$\frac{ml^2}{2}\ddot{\alpha} = -qEl\,\alpha \quad \Longrightarrow \quad \ddot{\alpha} = -\Omega^2\alpha, \qquad \Omega = \sqrt{\frac{2qE}{ml}}.$$

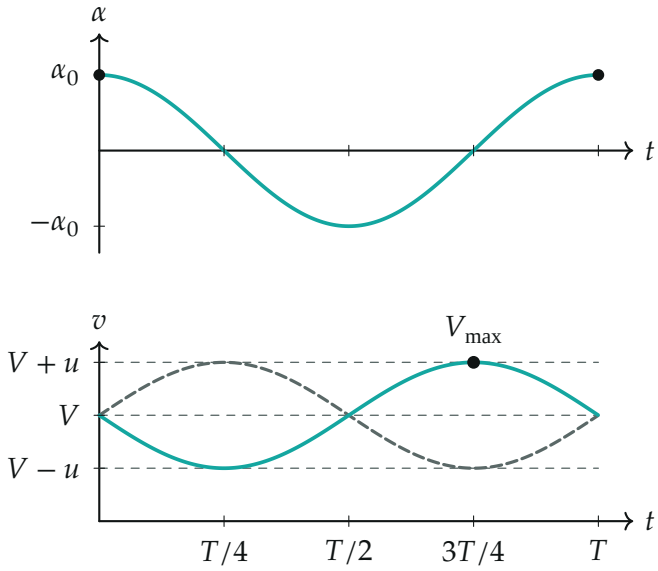
Это уравнение гармонических колебаний. С начальными условиями $\alpha(0) = \alpha_0$, $\dot{\alpha}(0) = 0$:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cos\Omega t.$$

4. Время возврата. Положение, параллельное начальному, — это $\alpha = \alpha_0$ с тем же знаком угла (с той же стороны от линии поля). Наименьшее время — один период колебаний:

$$t_{\min} = T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{2qE}}.$$

Обратите внимание: через полпериода угол равен $-\alpha_0$, спица стоит зеркально и параллельна начальной не будет. Период не зависит ни от α_0, ни от V.



сплошная — заряд q, штриховая — заряд $-q$

Вверху — угол спицы; внизу — скорость шариков вдоль V (для заряда q — сплошная линия): она колеблется около V с размахом u.

Пункт 2.

5. Скорость шарика q. Относительно C шарик с зарядом q находится на расстоянии $l/2$ от оси вращения, в точке $\left(\frac{l}{2}\sin\alpha,\ \frac{l}{2}\cos\alpha\right)$, где ось x направлена по $\vec{V}$. В лабораторной системе его координата вдоль V при малом α

$$x_q(t) = Vt + \frac{l}{2}\sin\alpha \approx Vt + \frac{l\alpha_0}{2}\cos\Omega t,$$

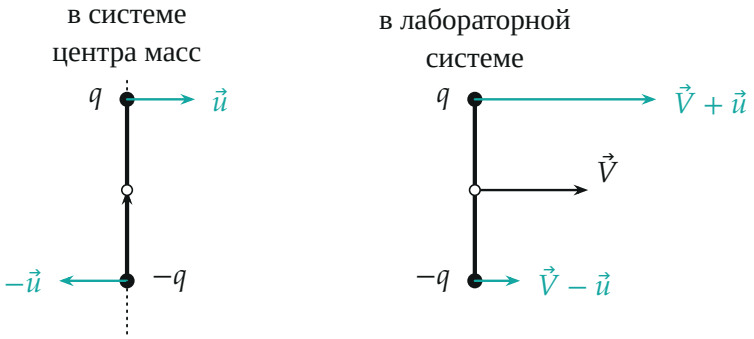
а перпендикулярная составляющая скорости — величина порядка α_0^2 и дальше не учитывается. Продифференцируем:

$$v_x = V - \frac{l\alpha_0\Omega}{2}\sin\Omega t = V - u\sin\Omega t.$$

Скорость шарика наибольшая, когда $\sin \Omega t = -1$ (момент $t = \frac{3}{4}T$, спица в этот миг проходит вдоль поля, и шарик q движется относительно C в ту же сторону, что и C):

$$V_{\max} = V + u = V + \frac{l}{2}\Omega\alpha_0 = V + \alpha_0\sqrt{\frac{qEl}{2m}}.$$

В момент $t = \frac{1}{4}T$ шарик q тоже проходит $\alpha = 0$, но движется относительно C навстречу V: скорость $V - u$ наименьшая.



Момент наибольшей скорости заряда q (спица вдоль поля): скорость в лабораторной системе — сумма скорости центра масс $\vec{V}$ и скорости вращения $\vec{u}$.

6. Тот же результат энергией. В системе отсчёта центра масс энергия диполя сохраняется: кинетическая энергия вращения $\frac{1}{2}I\omega^2$ плюс потенциальная энергия диполя в поле $U = -qEl\cos\alpha$. Спица неподвижна при α_0, поэтому для произвольного α при малых углах ($1 - \cos\alpha \approx \alpha^2/2$)

$$\frac{ml^2}{4}\omega^2 + \frac{qEl}{2}\alpha^2 = \frac{qEl}{2}\alpha_0^2 \quad \Longrightarrow \quad \omega^2 = \Omega^2(\alpha_0^2 - \alpha^2),$$

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\Omega\alpha_0}\right)^2 = 1.$$

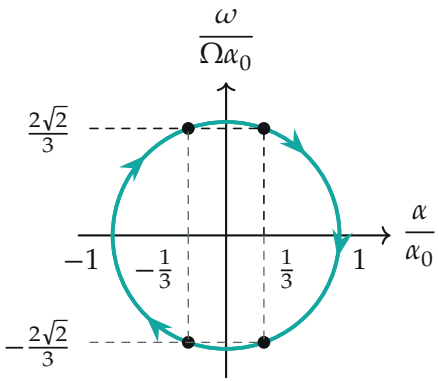
При $\alpha = 0$ угловая скорость наибольшая: $\omega_{\max} = \Omega\alpha_0$, и скорость шарика относительно C равна $\omega_{\max} l/2 = u$, как и выше.

Пункт 3.

7. Угловая скорость при $\alpha = \alpha_0/3$. Подставим $\alpha = \alpha_0/3$ в соотношение шага 6: $\left(\dfrac{\omega}{\Omega\alpha_0}\right)^2 = 1 - \dfrac{1}{9} = \dfrac{8}{9}$, откуда

$$\omega = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,\Omega\alpha_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,\alpha_0\sqrt{\frac{2qE}{ml}} = \frac{4}{3}\,\alpha_0\sqrt{\frac{qE}{ml}}.$$

Такой угол спица составляет четыре раза за период; модуль угловой скорости во всех этих моментах один.



Закон сохранения энергии в виде окружности (фазовая диаграмма): точки с $|\alpha| = \alpha_0/3$ — четыре отмеченные, во всех $|\omega| = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,\Omega\alpha_0$. Движение по окружности — по часовой стрелке.

Проверка. Размерность: $qE/(ml)$ — ньютон на килограмм на метр, то есть с^{-2}, так что Ω — с^{-1}. Пределы: $E \to 0$ даёт $T \to \infty$ и $V_{\max} \to V$ (спица не поворачивается); $\alpha = \alpha_0$ даёт $\omega = 0$, $\alpha = 0$ — $\omega = \Omega\alpha_0$, как в пункте 2. Второй способ для угловой скорости: из $\alpha = \alpha_0\cos\Omega t$ имеем $|\dot\alpha| = \Omega\alpha_0|\sin\Omega t|$, и при $\cos\Omega t = \frac{1}{3}$ получаем $|\sin\Omega t| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ — тот же ответ.

Ответ. 1) $t = 2\pi\sqrt{\dfrac{ml}{2qE}}$; 2) $V_{\max} = V + \alpha_0\sqrt{\dfrac{qEl}{2m}}$; 3) $\omega = \dfrac{4}{3}\,\alpha_0\sqrt{\dfrac{qE}{ml}}$.