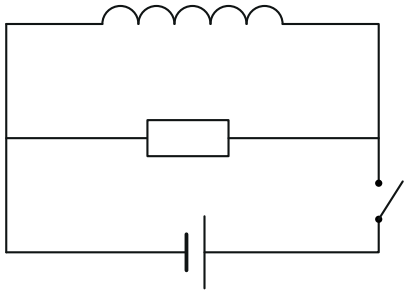
Цепь с катушкой и ключом: токи и теплота

Задача 4. [Физтех 2016/17, 11 класс, варианты 7–10, задача 4] В электрической цепи, схема которой показана на рисунке, все элементы идеальные, ключ разомкнут, тока в цепи нет. Ключ на некоторое время замыкают, а затем размыкают. Заряд, протекший через катушку индуктивностью L при разомкнутом ключе, оказался в 3 раза больше заряда, протекшего через катушку при замкнутом ключе. После размыкания ключа в цепи выделилось количество теплоты Q.



1. Найти ток, протекавший через резистор сразу после размыкания ключа.
2. Найти ток, протекавший через резистор перед размыканием ключа.

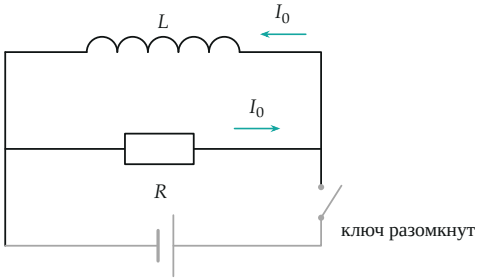
▲ **Решение. Что происходит.** Это переходный процесс в цепи с катушкой. Пока ключ замкнут, идеальная батарея с ЭДС $\mathcal{E}$ подаёт напряжение $\mathcal{E}$ на параллельные ветви: через резистор сразу идёт постоянный ток, а ток катушки растёт линейно, потому что напряжение на ней постоянно. После размыкания батарея отключена, катушка и резистор образуют замкнутый контур: ток катушки сохраняется (иначе ЭДС самоиндукции была бы бесконечной) и затухает на резисторе, а вся энергия катушки уходит в теплоту. Идея задачи: заряд — это площадь под графиком тока; отношение зарядов через катушку в двух стадиях связывает ток резистора с током катушки в момент размыкания.

Обозначения. R — сопротивление резистора, τ — время, на которое ключ был замкнут, I_0 — ток катушки в момент размыкания, I_R —

ток резистора при замкнутом ключе (он постоянен). q_1 и q_2 — заряды, протёкшие через катушку при замкнутом и при разомкнутом ключе; по условию $q_2 = 3q_1$. Величины $\mathcal{E}$, R, τ в ответ не войдут: они сократятся.

Пункт 1.

1. Ток сразу после размыкания. Ключ разомкнут, остался контур из катушки и резистора. Ток катушки не может измениться скачком: быстрое изменение тока создало бы в катушке ЭДС самоиндукции $-L\,dI/dt$, сколь угодно большую. Поэтому сразу после размыкания в катушке течёт тот же ток I_0, что и перед ним. Контур состоит из двух элементов последовательно, значит, этот же ток идёт и через резистор. Направление тока в катушке сохраняется, а через резистор он течёт теперь в сторону, противоположную той, что была при замкнутом ключе.



Ключ разомкнут: ток I_0 идёт по контуру из катушки и резистора (батарея отключена); в резисторе он направлен против прежнего.

2. Энергия. Запишем закон сохранения энергии для контура катушка + резистор: от момента размыкания, когда ток равен I_0, до полного затухания тока вся энергия магнитного поля катушки $\dfrac{LI_0^2}{2}$ переходит в теплоту на резисторе. Других потерь нет: элементы идеальные, теплота выделяется только на резисторе. Поэтому

$$Q = \frac{LI_0^2}{2} \quad \Longrightarrow \quad I_0 = \sqrt{\frac{2Q}{L}}.$$

Пункт 2.

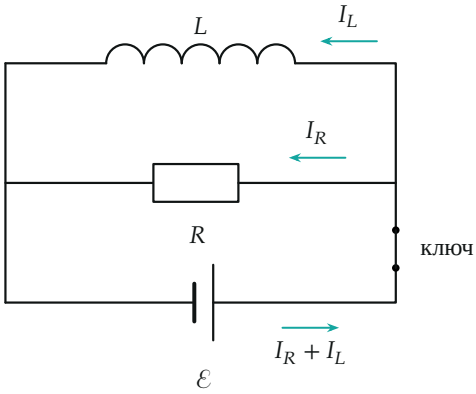
3. Ключ замкнут. Батарея идеальная, поэтому на каждой ветви — резисторе и катушке — напряжение $\mathcal{E}$ в течение всего времени τ. Через

резистор идёт постоянный ток $I_R = \mathcal{E}/R$. Для катушки закон самоиндукции даёт $L\,dI_L/dt = \mathcal{E}$, то есть ток растёт линейно от нуля: $I_L = \mathcal{E}t/L$. К моменту размыкания

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}\tau}{L}.$$

Заряд, протёкший через катушку, равен площади под графиком тока. Для линейно растущего тока это площадь треугольника, то есть среднее значение $I_0/2$ на время τ:

$$q_1 = \frac{I_0\tau}{2}.$$



Ключ замкнут: на катушке и резисторе одно напряжение $\mathcal{E}$, ток батареи равен $I_R + I_L$.

4. Ключ разомкнут. Ток в контуре один и тот же в катушке и в резисторе. Запишем второе правило Кирхгофа для контура: ЭДС самоиндукции катушки равна напряжению на резисторе, $-L\dfrac{dI}{dt} = RI$. Нас интересует заряд, а не зависимость $I(t)$, поэтому умножим на dt и учтём $I\,dt = dq$: $L\,dI = -R\,dq$. Сложим эти равенства от момента размыкания до полного затухания тока: ток изменился от I_0 до нуля, а заряд — от нуля до q_2:

$$L\,(0 - I_0) = -R\,q_2 \quad\Longrightarrow\quad q_2 = \frac{LI_0}{R}.$$

5. Связь I_R и I_0. Из шага 3 ЭДС равна $\mathcal{E} = \dfrac{LI_0}{\tau}$, поэтому ток резистора при замкнутом ключе

$$I_R = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{LI_0}{R\tau} \quad \Longrightarrow \quad I_R\tau = \frac{LI_0}{R} = q_2.$$

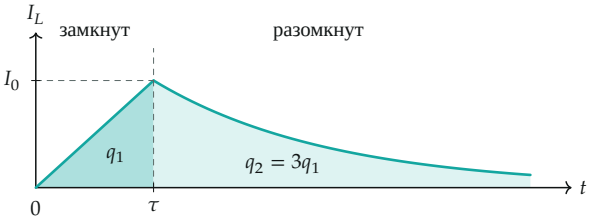
Заряд $I_R\tau$ — это заряд, протёкший через резистор при замкнутом ключе; он равен заряду q_2 через катушку (и тот же через резистор) при разомкнутом ключе.

6. Условие $q_2 = 3q_1$. Подставим $q_2 = I_R\tau$ и $q_1 = I_0\tau/2$:

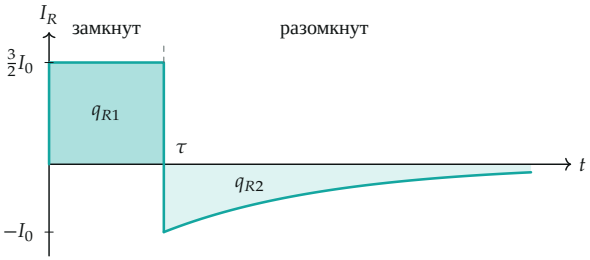
$$I_R\tau = 3 \cdot \frac{I_0\tau}{2} \quad \Longrightarrow \quad I_R = \frac{3}{2}I_0 = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2Q}{L}}.$$

Ток через резистор перед размыканием в полтора раза больше тока катушки в тот момент: катушка к моменту размыкания достигла лишь $2/3$ от тока $\mathcal{E}/R$, который установился бы при очень долгом замыкании.

7. Картина целиком. Из $q_2/q_1 = 3$ и $q_2 = LI_0/R$, $q_1 = I_0\tau/2$ следует $L/R = \frac{3}{2}\tau$. При таких значениях токи выглядят так: после размыкания ток катушки убывает по закону $I_0e^{-Rt'/L}$ (t' — время после размыкания), и площадь под этой кривой втрое больше площади треугольника до размыкания.



Ток катушки: нарастание при замкнутом ключе (бирюзовая заливка, q_1) и затухание после размыкания ($q_2 = 3q_1$).



Ток резистора: постоянный $\frac{3}{2}I_0$ при замкнутом ключе и затухающий, противоположного направления, после размыкания; площади равны: $q_{R1} = I_R\tau = q_{R2} = q_2$.

Обратите внимание: сразу после размыкания ток через резистор равен I_0, а не I_R — непрерывен ток катушки, а ток резистора при размыкании скачком меняется с $\frac{3}{2}I_0$ до $-I_0$.

Проверка. Размерность: Q/L — джоуль на генри, это ампер в квадрате; корень — ампер. Второй способ для q_2: интеграл от $I_0e^{-Rt'/L}$ по t' от нуля до бесконечности равен I_0L/R, как в шаге 4. Согласование: при $L/R = \frac{3}{2}\tau$ имеем $I_0 = \dfrac{\mathcal{E}\tau}{L} = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\mathcal{E}}{R}$, то есть $I_R = \frac{3}{2}I_0$ — тот же результат другим путём.

Ответ. 1) $I_0 = \sqrt{\dfrac{2Q}{L}}$; 2) $I_R = \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{2Q}{L}}$.