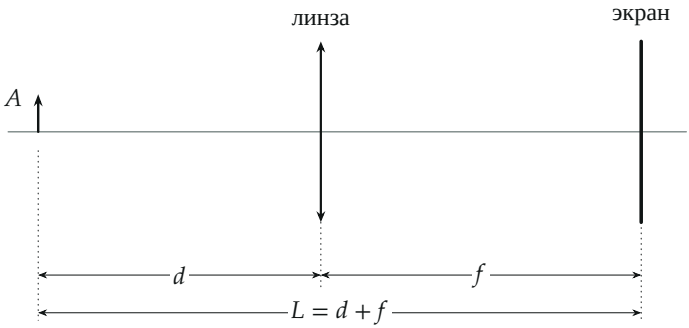
Линза на экране: отношение расстояний при заданном f/L

Задача 5. [Физтех 2016/17, 11 класс, варианты 7–10, задача 5] С помощью линзы на экране получено увеличенное изображение предмета, расположенного перпендикулярно главной оптической оси линзы. Отношение фокусного расстояния линзы к расстоянию между предметом и экраном оказалось равным $3/16$. Найти отношение расстояния между предметом и линзой к расстоянию между предметом и экраном.



Предмет A, линза и экран на одной оси; положение линзы нарисовано произвольно — его и нужно найти.

▲ **Решение. Что происходит.** Экран собирает действительное изображение, значит, расстояния до предмета и до экрана связаны формулой тонкой линзы. Известно отношение F/L, где L — расстояние от предмета до экрана, а искать нужно долю d/L. Поэтому все расстояния удобно измерять в долях L: тогда L сократится и останется одно неизвестное, квадратное уравнение.

Обозначения. d — расстояние от предмета до линзы, f — от линзы до экрана, F — фокусное расстояние, $L = d+f$ — от предмета до экрана; $x = d/L$ — искомое отношение. Линза тонкая, предмет мал и перпендикулярен оси, лучи близки к оси.

1. Формула линзы в долях L. Для действительного изображения на

экране запишем формулу тонкой линзы:

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}.$$

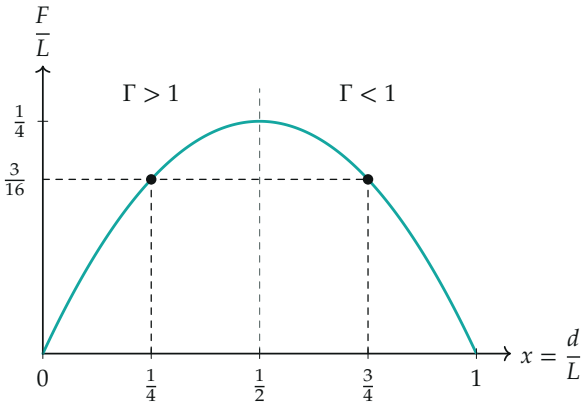
Левую часть приведём к общему знаменателю и учтём $d+f=L$:

$$\frac{d+f}{df}=\frac{L}{df}=\frac{1}{F}\quad\Longrightarrow\quad\frac{F}{L}=\frac{df}{L^2}=\frac{d}{L}\cdot\frac{f}{L}.$$

Так как $d=xL$, а $f=L-d=(1-x)L$, получаем

$$\frac{F}{L}=x(1-x).$$

Это зависимость F/L от положения линзы между предметом и экраном; её график — парабола, он на рисунке ниже.



Уравнение $x(1-x)=3/16$: уровень $3/16$ пересекает параболу в двух точках, $x=1/4$ и $x=3/4$. Слева от $x=1/2$ изображение увеличенное ($\Gamma>1$), справа — уменьшенное.

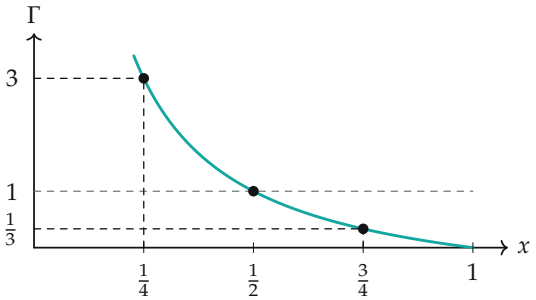
2. Уравнение для x. По условию $F/L=3/16$:

$$x(1-x)=\frac{3}{16}\quad\Longrightarrow\quad16x^2-16x+3=0,$$

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 192}}{32} = \frac{16 \pm 8}{32},$$

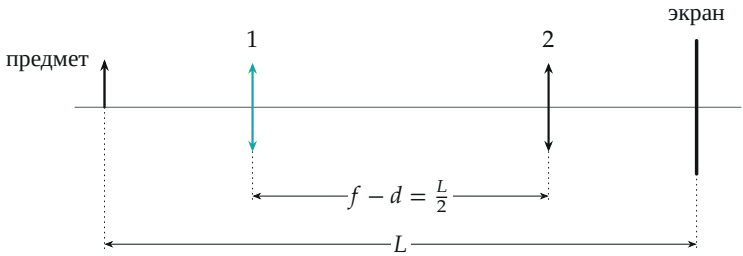
то есть $x = \dfrac{1}{4}$ или $x = \dfrac{3}{4}$.

3. Какой корень подходит. Изображение увеличенное: линейное увеличение $\Gamma = \dfrac{f}{d} = \dfrac{1-x}{x} > 1$. Это значит $f > d$, то есть линза ближе к предмету, чем к экрану, и $x < \dfrac{1}{2}$. Отсюда $x = \dfrac{1}{4}$; тогда $\Gamma = \dfrac{3/4}{1/4} = 3$.

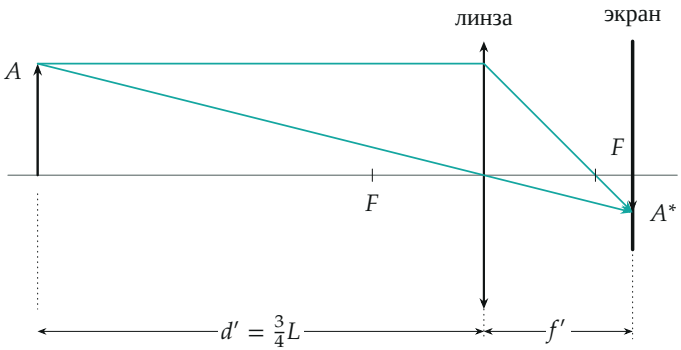


Увеличение $\Gamma = (1-x)/x$ при фиксированном расстоянии предмет — экран: при $x = 1/4$ оно равно 3, при $x = 3/4$ — $1/3$.

Обратите внимание: корень $x = 3/4$ — не ошибка алгебры, а настоящее второе положение линзы. Формула линзы симметрична относительно d и f: если поменять предмет и изображение местами, ход лучей обратим, и при тех же L и F линза даёт уменьшенное изображение. Условие «увеличенное» выбирает из двух положений одно.



Два положения линзы между тем же предметом и экраном: 1 *— увеличенное изображение* ($d = \frac{1}{4}L$), 2 *— уменьшенное* ($d = \frac{3}{4}L$); *расстояние между ними* $L/2$.



Второе положение линзы, $x = 3/4$: *изображение уменьшенное* ($\Gamma = 1/3$), *условию не подходит.*

Проверка. Возьмём $L = 16$ условных единиц: тогда $F = 3$, $d = 4$, $f = 12$, и $\frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3} = \frac{1}{F}$; увеличение $f/d = 3$. Предел: уравнение $x(1-x) = F/L$ имеет корни, пока $F/L \le \frac{1}{4}$, то есть $L \ge 4F$; здесь $L = \frac{16}{3}F > 4F$, корней два. При $L = 4F$ корень один, $x = \frac{1}{2}$, $\Gamma = 1$ — это наименьшее расстояние от предмета до экрана, при котором изображение получается. Второй способ: расстояние между двумя положениями линзы $f - d = \sqrt{L(L-4F)} = \frac{L}{2}$, и действительно $12 - 4 = 8 = \frac{16}{2}$.

Ответ. $x = \dfrac{d}{L} = \dfrac{1}{4}$.