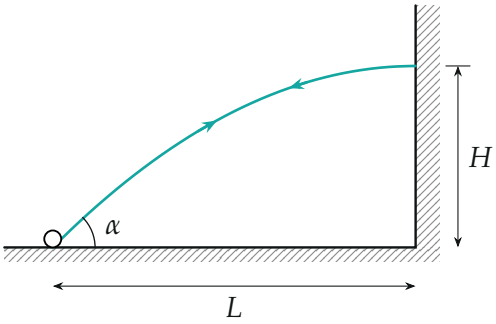
Мяч бьют ногой и он отскакивает от стены

Задача 1. [Физтех 2016/17, 9 класс, задача 1] Мальчик бьёт ногой по мячу, который лежит на горизонтальной поверхности земли на некотором расстоянии от вертикальной стены дома. Сразу после удара мяч полетел под углом $\alpha = 45°$ к горизонту, затем упруго ударился о стену дома на высоте $H = 5$ м от поверхности земли и упал на землю на то же место, где лежал вначале.

1. Найти скорость мяча сразу после удара ногой.
2. Найти время t_0 полёта мяча от момента удара ногой до падения на землю.
3. На каком расстоянии L от стены лежал мяч вначале?

Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2.



Поясняющий рисунок. Траектория мяча (по расчёту): к стене и обратно он летит по одной и той же параболе — стрелки показывают оба направления.

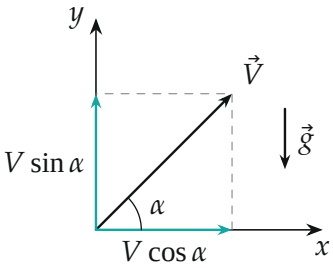
▲ **Решение. Что происходит.** Это движение тела, брошенного под углом к горизонту, с упругим отражением от стены. При упругом ударе о гладкую вертикальную стену горизонтальная проекция скорости меняет знак, а вертикальная не меняется. Поэтому вертикальное движение мяча такое же, как если бы стены не было, а горизонтальное — «туда и обратно» с постоянной по модулю скоростью. Главная идея: раз мяч вернулся в исходную точку, путь туда и путь обратно занимают одинаковое время, и удар о стену приходится ровно на середину полёта — на верхнюю точку траектории.

Обозначения. V — скорость мяча сразу после удара ногой; ось x горизонтально к стене, ось y вертикально вверх, начало — в точке, где лежал мяч; t_1 — момент удара о стену.

1. Проекции скорости. Разложим начальную скорость по осям:

$$V_x = V\cos\alpha, \qquad V_y = V\sin\alpha.$$

Ускорение $\vec{a} = \vec{g}$ направлено вниз: $a_x = 0$, $a_y = -g$.



Разложение начальной скорости по осям: горизонтальная проекция $V\cos\alpha$, вертикальная $V\sin\alpha$; ускорение $\vec{g}$ вниз.

2. Удар о стену — в верхней точке. Вертикальное движение стена не меняет. Закон движения по оси y (равноускоренное движение):

$$y(t) = V\sin\alpha\cdot t - \frac{gt^2}{2},$$

мяч падает на землю в момент $t_0 = \dfrac{2V\sin\alpha}{g}$. По оси x мяч летит к стене со скоростью $V\cos\alpha$, после удара — обратно с той же по модулю скоростью. Чтобы вернуться в начальную точку, он должен пройти путь L туда и L обратно с одной скоростью — значит, за одинаковое время: $t_1 = t_0/2 = \dfrac{V\sin\alpha}{g}$. Это и есть момент, когда $V_y = V\sin\alpha - gt_1 = 0$: мяч ударяется о стену в верхней точке траектории, скорость его в этот момент горизонтальна. После удара он летит по зеркальной половине параболы — по той же линии, что и к стене.

Пункт 1.

3. Скорость после удара ногой. Высота верхней точки равна H. Формула пути равноускоренного движения по оси y от старта до верхней точки (там $V_y = 0$):

$$0 - (V\sin\alpha)^2 = -2gH \quad \Rightarrow$$
$$V = \frac{\sqrt{2gH}}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{2\cdot 10\cdot 5}}{\sqrt{2}/2}\ \text{м/с} = 10\sqrt{2}\ \text{м/с} \approx 14\ \text{м/с}.$$

Пункт 2.

4. Время полёта. От удара ногой до стены — время подъёма в верхнюю точку, $H = \dfrac{gt_1^2}{2}$ (падение из верхней точки без начальной вертикальной скорости, прочитанное «назад»). Весь полёт вдвое дольше:

$$t_0 = 2t_1 = 2\sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{8H}{g}} = \sqrt{\frac{8\cdot 5}{10}}\ \text{с} = 2\ \text{с}.$$

Пункт 3.

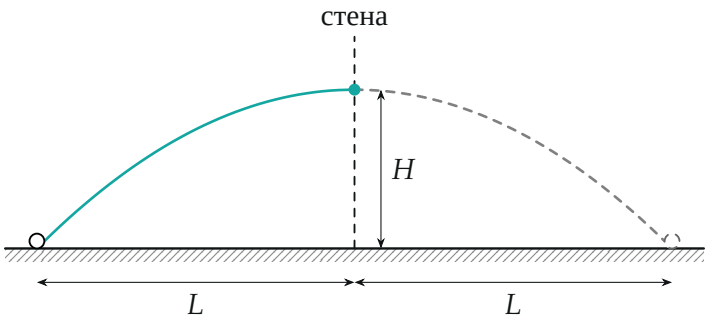
5. Расстояние до стены. По оси x до стены мяч летит равномерно со скоростью $V\cos\alpha$ время $t_1 = t_0/2$:

$$L = V\cos\alpha\cdot\frac{t_0}{2} = \frac{\sqrt{2gH}}{\sin\alpha}\cos\alpha\cdot\sqrt{\frac{2H}{g}}$$
$$= \frac{2H}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{2\cdot 5}{1}\ \text{м} = 10\ \text{м}.$$

6. Второй взгляд: «развёрнутая» траектория. Отражение от стены можно заменить зеркальным: продолжим полёт за стену, как будто стены нет, и отразим эту часть пути в стене. Без стены мяч пролетел бы по полной параболе расстояние $2L$ и упал бы в точке, зеркальной исходной. Дальность полёта тела, брошенного под углом α:

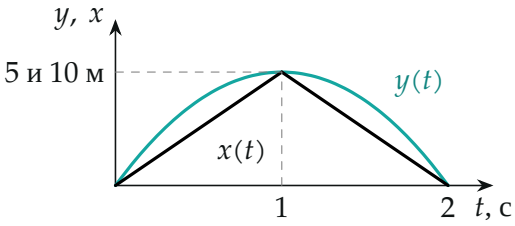
$$2L = \frac{V^2\sin 2\alpha}{g} = \frac{200\cdot 1}{10}\ \text{м} = 20\ \text{м} \quad \Rightarrow \quad L = 10\ \text{м}.$$

Это то же значение, а стена стоит ровно посередине, над вершиной параболы.



«Развёрнутая» траектория: часть пути после удара отражена в стене (серый пунктир). Получается полная парабола с вершиной на стене и дальностью $2L$.

Обратите внимание: высота удара H — это максимальная высота подъёма, только потому, что мяч вернулся в ту же точку. Если бы он упал ближе или дальше, удар о стену пришёлся бы не на вершину, и связь $V\sin\alpha = \sqrt{2gH}$ была бы неверна.



Графики по расчёту: высота $y(t)$ (бирюзовая парабола, максимум $H = 5$ м) и расстояние от начальной точки $x(t)$ (чёрная ломаная, максимум $L = 10$ м; масштабы по осям y и x разные). Оба графика достигают максимума одновременно, в момент удара о стену $t_1 = 1$ с.

Проверка. Размерность: $\sqrt{gH}$ — м/с, $\sqrt{H/g}$ — с, $H/\operatorname{tg}\alpha$ — м. Второй способ для L дан в шаге 6 (дальность полной параболы). Ещё одна проверка: $t_0 = 2V\sin\alpha/g = 2\cdot 10\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}/10 = 2$ с — совпадает с шагом 4.

Смысл: упругая стена лишь «складывает» обычную параболу пополам, поэтому мяч, попавший в стену в вершине траектории, возвращается к ногам.

Ответ. 1) $V = \dfrac{\sqrt{2gH}}{\sin\alpha} = 10\sqrt{2} \approx 14$ м/с; 2) $t_0 = \sqrt{\dfrac{8H}{g}} = 2$ с; 3) $L = \dfrac{2H}{\operatorname{tg}\alpha} = 10$ м.