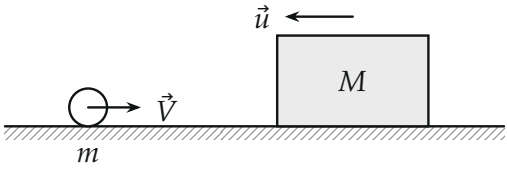
Шарик и массивный брусок: упругий удар

Задача 2. [Физтех 2016/17, 9 класс, задача 2] Шарик, скользящий по гладкой горизонтальной поверхности, сталкивается с бруском, который движется по той же поверхности навстречу шарику. Грань бруска, о которую ударяется шарик, перпендикулярна вектору скорости шарика. Масса бруска много больше массы шарика. После упругого столкновения с бруском шарик движется с кинетической энергией, которая в 121 раз больше его кинетической энергии движения до столкновения. Найти отношение начальных скоростей движения шарика и бруска.



Поясняющий рисунок: шарик массой m со скоростью $\vec{V}$ и брусок массой $M \gg m$ со скоростью $\vec{u}$ движутся навстречу друг другу.

▲ **Решение. Что происходит.** Это упругий удар лёгкого тела о массивное. Брусок при ударе скорость не меняет, поэтому удобно перейти в систему отсчёта бруска: в ней брусок — неподвижная стенка, и шарик отскакивает от неё с той же по модулю скоростью, как мяч от стены. Вернувшись в систему отсчёта земли, получим скорость шарика после удара: встречный брусок «отбивает» шарик, как ракетка, и шарик ускоряется. Условие на энергию даст уравнение на V/u.

Обозначения. m — масса шарика, M — масса бруска; $V > 0$ и $u > 0$ — модули начальных скоростей шарика и бруска относительно земли; V' — проекция скорости шарика после удара. Ось x направлена по начальному движению шарика; тогда проекция скорости бруска $-u$.

1. Брусок при ударе скорость не меняет. Закон сохранения импульса системы шарик + брусок за время удара (поверхность гладкая, по го-

ризонтали внешних сил нет), в проекции на ось x:

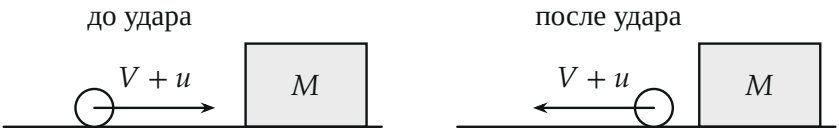
$$mV - Mu = mV' + Mu'_x \quad \Rightarrow$$
$$u'_x - (-u) = \frac{m}{M}(V - V') \to 0 \text{ при } M \gg m.$$

Скорость бруска остаётся $-u$, и система отсчёта бруска инерциальна и до, и после удара.

2. Удар в системе отсчёта бруска. Проекция скорости шарика относительно бруска до удара (закон сложения скоростей)

$$v_{\text{отн}} = V - (-u) = V + u$$

— скорости складываются, потому что тела едут навстречу. Брусок в этой системе неподвижен, удар упругий, кинетическая энергия шарика сохраняется, и скорость шарика меняет только знак: $v'_{\text{отн}} = -(V + u)$.

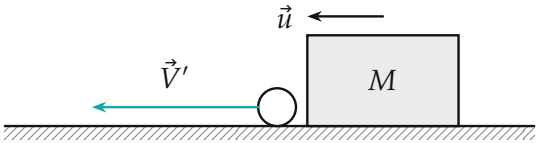


Система отсчёта бруска. Брусок покоится, шарик подлетает со скоростью $V + u$ и после упругого удара улетает обратно с той же по модулю скоростью.

3. Обратно в систему отсчёта земли. Закон сложения скоростей: скорость шарика относительно земли равна скорости относительно бруска плюс скорость бруска:

$$V' = -(V + u) + (-u) = -(V + 2u).$$

Знак минус: шарик после удара всегда летит назад, а модуль его скорости $V + 2u$ больше начального на $2u$.



Система отсчёта земли после удара: брусок едет с прежней скоростью $\vec{u}$, шарик летит назад со скоростью V', по модулю в 11 раз больше V (бирюзовая стрелка; длины — в масштабе для найденного ответа $u = 5V$).

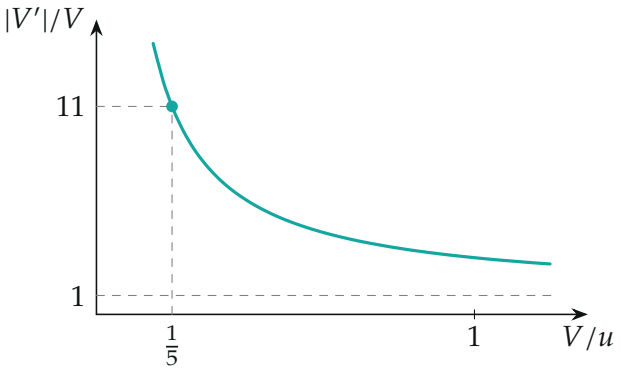
4. Условие на энергию. Кинетическая энергия шарика после удара в 121 раз больше начальной:

$$\frac{mV'^2}{2} = 121 \cdot \frac{mV^2}{2} \quad \Rightarrow \quad |V'| = 11\,V.$$

Из шага 3 $|V'| = V + 2u$:

$$V + 2u = 11V \quad \Rightarrow \quad u = 5V \quad \Rightarrow \quad \frac{V}{u} = \frac{1}{5}.$$

Обратите внимание: здесь нет выбора корня: $|V'| = V + 2u$ при $V, u > 0$ без модуля. Но если по ошибке взять скорость шарика относительно бруска $V - u$ (как при догоне), получится $|V'| = |2u - V|$ и другое уравнение. Для встречного движения относительная скорость — сумма модулей.



Модуль скорости шарика после удара в долях начальной, $|V'|/V = 1 + 2u/V$, как функция V/u. Энергия в 121 раз больше — $|V'|/V = 11$: точка $V/u = \frac{1}{5}$. Чем медленнее шарик по сравнению с бруском, тем сильнее брусок его разгоняет; $|V'| > V$ всегда (пунктир $|V'|/V = 1$).

Проверка. Размерность: отношение скоростей безразмерно. Второй способ — общая формула упругого удара для проекций: $V' =$

$\frac{(m-M)V+2M(-u)}{m+M} \to -V-2u$ при $m/M \to 0$ — то же, что в шаге 3. Подстановка: $V=1$, $u=5$, $|V'|=1+10=11$, энергия больше в 121 раз. Предел $u \to 0$ (брусок стоит): $|V'|=V$, энергия не меняется — отскок от неподвижной стены. Смысл: движущийся навстречу массивный брусок за удар передаёт шарику скорость $2u$, и энергия шарика растёт за счёт работы, совершённой бруском.

Ответ. $\frac{V}{u}=\frac{1}{5}$, где V — начальная скорость шарика, u — бруска.