Четыре одинаковых резистора: собрать нужное сопротивление

Задача 5. [Физтех 2016/17, 9 класс, варианты 2–3, задача 5] Допустим, что в Вашем распоряжении есть четыре резистора с сопротивлением $R = 15$ Ом каждый.

1. Как следует соединить эти резисторы, чтобы сопротивление полученной цепочки было равно $R_0 = 5R/3$? Ответ подкрепите схемой соединения и расчётом эквивалентного сопротивления.
2. Собранную по Вашей схеме цепочку подключают к источнику постоянного напряжения $U = 75$ В. Какая наименьшая мощность P рассеивается на одном отдельно взятом резисторе? Сколько таких резисторов?



Поясняющий рисунок: четыре одинаковых резистора, из которых надо собрать цепочку.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на сборку цепи из одинаковых элементов: нужное сопротивление раскладываем на «кирпичики», которые дают последовательное и параллельное соединения. Последовательно сопротивления складываются, параллельно складываются обратные величины; параллельная группа всегда меньше самого малого своего элемента. Во втором пункте ток в цепи общий, а мощность на резисторе $P = I^2R = U_R^2/R$ — поэтому меньше всего греется резистор с наименьшим током.

Обозначения. A и B — концы цепочки; $R_1, \dots, R_4$ — номера одинаковых резисторов ($R_i = R$); I — ток через цепочку; $U_{AB} = U$.

Пункт 1.

1. Подбор схемы. Запишем $R_0 = \frac{5}{3}R = R + \frac{2}{3}R$. Слагаемое R — один резистор, включённый последовательно. Осталось из трёх резисторов получить $\frac{2}{3}R$. Это меньше R, значит, нужна параллельная группа; $\frac{2}{3}R$

даёт пара «$2R$ параллельно R»: $\dfrac{2R \cdot R}{2R + R} = \dfrac{2}{3}R$. А $2R$ — два резистора последовательно. Итак: R_1 и R_2 последовательно, эта пара параллельно R_3, и вся группа последовательно с R_4.

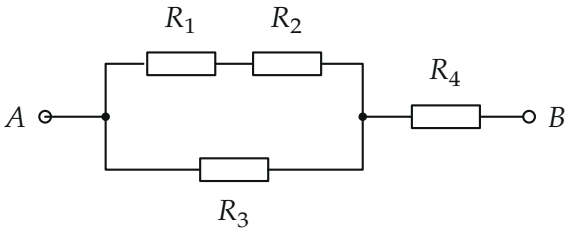


Схема соединения: пара R_1, R_2 параллельно R_3, затем R_4.

2. Расчёт эквивалентного сопротивления — сворачиваем схему по шагам. Последовательная пара: $R_{12} = R + R = 2R$. Параллельно с R_3:

$$\frac{1}{R_{123}} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{R} = \frac{3}{2R} \quad \Longrightarrow \quad R_{123} = \frac{2}{3}R.$$

Последовательно с R_4: $R_{AB} = \dfrac{2}{3}R + R = \dfrac{5}{3}R = R_0 = 25$ Ом.

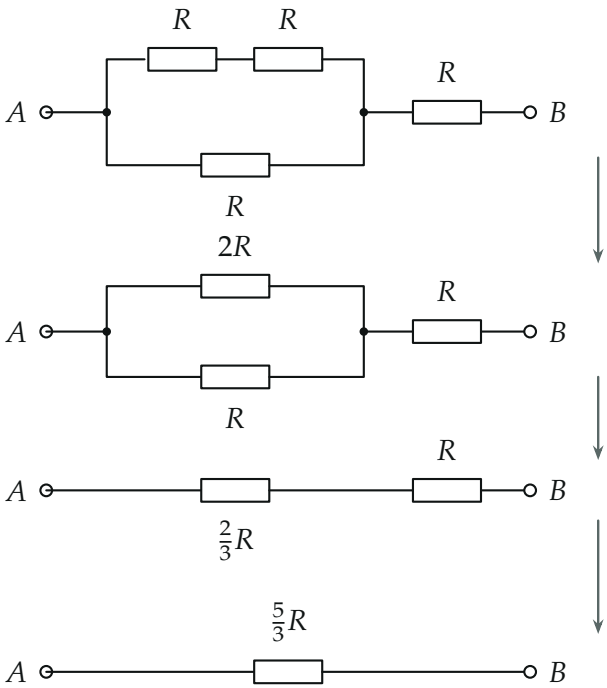
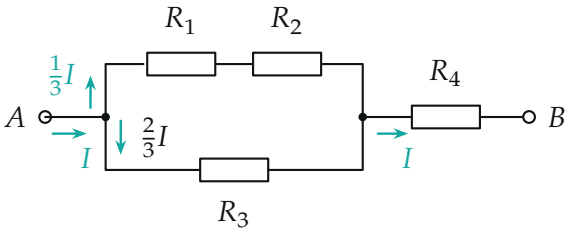


Схема сворачивается за три шага: последовательная пара, параллельная группа, последовательное соединение.

Пункт 2.

3. Ток и напряжения. По закону Ома для всей цепочки $I = \dfrac{U}{R_0} = \dfrac{3U}{5R} = \dfrac{75}{25} = 3$ А. Весь ток идёт через R_4. Напряжение на параллельной группе $U_{123} = I \cdot \frac{2}{3}R = \frac{2}{5}U = 30$ В. Оно одно и то же для обеих ветвей: через R_3 идёт ток $U_{123}/R = 2$ А$= \frac{2}{3}I$, через пару R_1R_2 — $U_{123}/(2R) =$ 1 А$= \frac{1}{3}I$ (ток делится обратно сопротивлениям ветвей; сумма 3 А — закон сохранения заряда в узле).



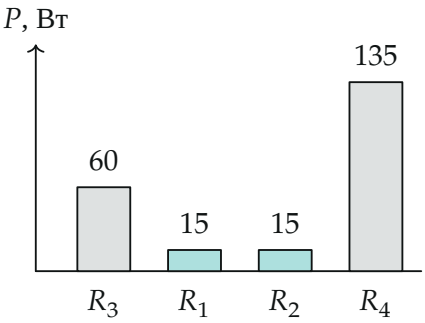
Токи: через R_4 — весь ток I, в параллельной группе он делится в отношении 1 : 2.

4. Мощности. По закону Джоуля — Ленца $P = I_k^2 R$:

$$P_4 = I^2 R = 135 \text{ Вт}, \qquad P_3 = \left(\tfrac{2}{3}I\right)^2 R = 60 \text{ Вт},$$

$$P_1 = P_2 = \left(\tfrac{1}{3}I\right)^2 R = \frac{U^2}{25R} = 15 \text{ Вт}.$$

Меньше всего греются резисторы с наименьшим током — R_1 и R_2, их два. Проверка суммой: $135 + 60 + 15 + 15 = 225$ Вт $= U^2/R_0 = 75^2/25$ — вся мощность источника.



Мощности на резисторах, Вт; наименьшая (бирюзой) — на двух резисторах последовательной пары.

Обратите внимание: резисторы одинаковые, но греются по-разному — мощность определяется током через каждый, а ток зависит от места резистора в схеме.

Проверка. Размерность: U^2/R — $\text{В}^2/\text{Ом} = \text{Вт}$. Второй способ для P_1: на паре напряжение 30 В делится поровну, на каждом 15 В, $P_1 = 15^2/15 = 15$ Вт — то же. Сумма мощностей совпала с мощностью всей цепи.

Ответ. 1) R_1 и R_2 последовательно, эта пара параллельно R_3, вся группа последовательно с R_4: $R_{\text{экв}} = \dfrac{2R \cdot R}{3R} + R = \dfrac{5}{3}R$; 2) $P = \dfrac{U^2}{25R} = 15$ Вт, таких резисторов два.