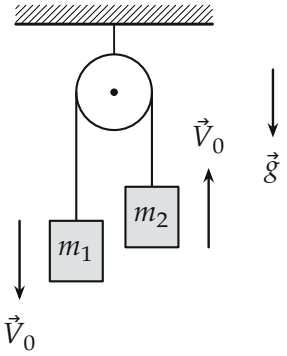
Два груза на нити через блок с начальной скоростью

Задача 1. [Физтех 2016/17, 9 класс, варианты 4–5, задача 1] Два груза массами $m_1 = 39$ г и $m_2 = 41$ г висят в поле тяжести на длинной нити, перекинутой через лёгкий блок, который может вращаться без трения. В начальный момент грузу m_1 сообщается скорость $V_0 = 30$ см/с, направленная вниз, а грузу m_2 сообщается такая же скорость, направленная вверх. Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2.

1. Найти ускорение грузов.
2. Найти максимальное смещение груза m_1 вниз.
3. Найти путь S, пройденный грузом m_1 через время $\tau = 2{,}5$ с после начала его движения.



Поясняющий рисунок: в начальный момент груз m_1 толкнули вниз, груз m_2 — вверх с той же скоростью.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Грузы связаны одной нерастяжимой нитью, поэтому в любой момент их скорости и ускорения равны по модулю и противоположны по направлению. Груз m_2 тяжелее, значит, ускорение системы направлено так, чтобы m_2 шёл вниз, а m_1 — вверх. Толчок же направил m_1 вниз: груз m_1 сначала тормозит, останавливается, а потом едет вверх. Это движение с постоянным ускорением, как у камня, брошенного вверх, только «ослабленное притяжение» $a \ll g$. Ключевой

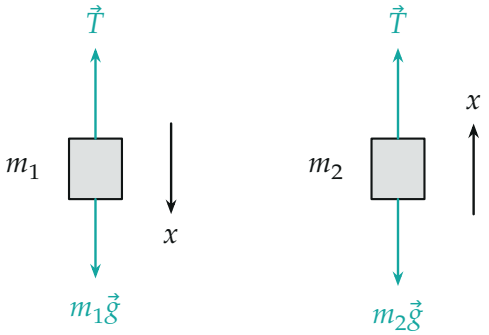
закон — второй закон Ньютона для каждого груза, дальше — кинематика равнопеременного движения.

Обозначения. Ось x направим вдоль движения нити так, что для груза m_1 она смотрит вниз, а для груза m_2 — вверх (одна координата на оба груза: на сколько опустился m_1, на столько поднялся m_2); начало — в начальном положении. Тогда проекции скорости и ускорения у обоих грузов одинаковы: v_x и a_x. T — сила натяжения нити, одинаковая по обе стороны блока (блок лёгкий, трения в оси нет).

Пункт 1.

1. Второй закон Ньютона для каждого груза. На груз m_1 действуют сила тяжести $m_1\vec{g}$ и натяжение $\vec{T}$, на груз m_2 — $m_2\vec{g}$ и такое же по модулю $\vec{T}$. Векторно: $m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{T}$, $m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + \vec{T}$. В проекциях на ось x (у m_1 — вниз, у m_2 — вверх):

$$m_1 a_x = m_1 g - T, \qquad m_2 a_x = T - m_2 g.$$



Силы на каждый груз. Ось x «идёт вдоль нити»: для m_1 вниз, для m_2 вверх.

2. Ускорение. Сложим уравнения — натяжение уйдёт:

$$(m_1 + m_2)\, a_x = (m_1 - m_2)\, g \quad \Longrightarrow \quad a_x = -\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\, g,$$

$$a_x = -\frac{2}{80} \cdot 10 = -0{,}25 \text{ м/с}^2.$$

Знак минус: ускорение направлено против оси — груз m_1 ускоряется вверх, груз m_2 вниз; модуль $a = 0{,}25$ м/с^2. Натяжение из первого уравнения: $T = m_1(g - a_x) = \dfrac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}\,g \approx 0{,}4$ Н — чуть меньше m_2g и чуть больше m_1g, как и должно быть. Ускорение не зависит от начальной скорости: она задаёт лишь начальное условие.

Пункт 2.

3. Наибольшее смещение m_1 вниз. Груз m_1 движется вниз и тормозит с постоянным ускорением; ниже всего он окажется в момент остановки $v_x = 0$. Кинематика равнозамедленного движения от начала до остановки: $0 - V_0^2 = 2a_xx_1$, откуда

$$x_1 = \frac{V_0^2}{2a} = \frac{0{,}3^2}{2 \cdot 0{,}25} = 0{,}18 \text{ м}.$$

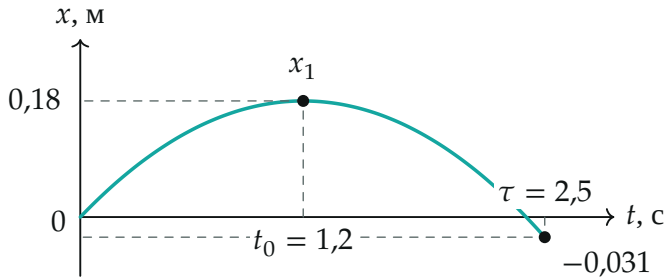
Время до остановки $t_0 = \dfrac{V_0}{a} = 1{,}2$ с.

Пункт 3.

4. Где груз в момент τ. Закон движения при постоянном ускорении:

$$x(t) = V_0t - \frac{at^2}{2}, \qquad x(\tau) = 0{,}3 \cdot 2{,}5 - \frac{0{,}25 \cdot 2{,}5^2}{2} \approx -0{,}031 \text{ м}.$$

Минус: в момент $\tau = 2{,}5$ с груз m_1 уже выше начального положения на 0,031 м. Координата — это перемещение, а не путь: до t_0 груз шёл вниз, после — вверх.

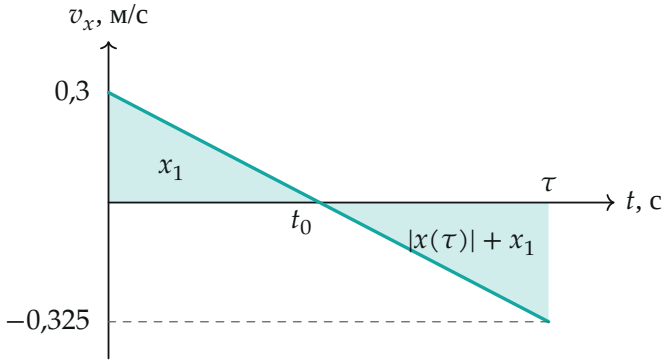


Координата груза m_1 (ось вниз): парабола, вершина — наибольшее смещение x_1 в момент остановки t_0.

5. Путь. Путь складывается из участков, на которых груз не меняет направления: вниз на x_1 до остановки, затем вверх от x_1 до $x(\tau)$, то есть на $x_1 - x(\tau) = x_1 + |x(\tau)|$:

$$S = x_1 + (x_1 + |x(\tau)|) = 2x_1 + |x(\tau)| = 0{,}36 + 0{,}031 \approx 0{,}391 \text{ м}.$$

6. Тот же путь вторым способом — по графику скорости. Проекция скорости $v_x = V_0 - at$ — прямая; путь равен сумме площадей между графиком и осью времени, обе площади берём со знаком плюс. Треугольник над осью: $\frac{1}{2}V_0 t_0 = x_1 = 0{,}18$ м. Треугольник под осью: от t_0 до τ скорость растёт по модулю от нуля до $a(\tau - t_0) = 0{,}325$ м/с, площадь $\frac{1}{2}a(\tau - t_0)^2 = 0{,}2113$ м. Сумма $\approx 0{,}391$ м — тот же ответ.



Скорость груза m_1: путь — сумма закрашенных площадей, вниз x_1 и вверх $x_1 + |x(\tau)|$.

Обратите внимание: подставить τ в закон движения и взять $|x(\tau)| = 0{,}031$ м — значит найти перемещение, а не путь. Груз развернулся в момент $t_0 = 1{,}2$ с $< \tau$, поэтому путь считаем по участкам.

Проверка. Размерность: V_0^2/a — (м/с)^2/(м/с^2) = м. Предел: при $m_1 = m_2$ ускорение $a = 0$, груз уходит вниз равномерно и $x_1 \to \infty$ — смещение действительно растёт при сближении масс. Путь двумя способами (по участкам и по площадям) совпал. Физический смысл: разница масс в 5 % даёт «ослабленную тяжесть» $a = g/40$, поэтому груз, толкнутый со скоростью 30 см/с, уходит на 18 см, а не на доли миллиметра.

Ответ. 1) $a = \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g = 0{,}25$ м/с^2 (груз m_1 ускоряется вверх); 2) $x_1 = \dfrac{V_0^2}{2a} = 0{,}18$ м; 3) $S = 2x_1 + \left|V_0\tau - \dfrac{a\tau^2}{2}\right| \approx 0{,}39$ м.