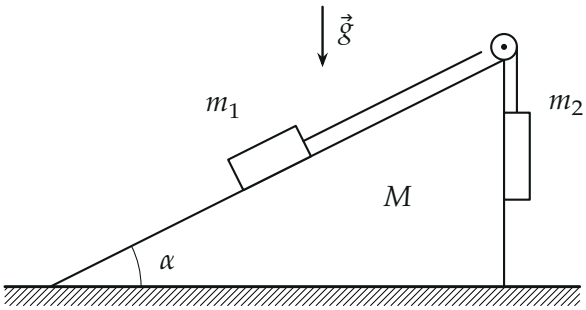
Клин с блоком и двумя грузами на шероховатом столе

Задача 4. [Физтех 2016/17, 9 класс, варианты 4–5, задача 4] Клин массой M находится на шероховатой горизонтальной поверхности стола. Через блок, укреплённый на вершине клина, перекинута лёгкая нерастяжимая нить, связывающая грузы, массы которых m_1 и m_2 (см. рис.).



Грузы удерживают, затем отпускают. После этого грузы движутся, а клин покоится. Гладкая наклонная поверхность клина образует с горизонтальной плоскостью угол α ($\sin\alpha = 0{,}8$). Считайте $M = 2m$, $m_1 = m$, $m_2 = 2m$. Массой блока и трением в его оси пренебречь.

1. Найдите ускорение грузов.
2. При каких значениях коэффициента μ трения скольжения клина по столу клин будет оставаться в покое?

▲ **Решение.** **Что происходит.** Клин покоится, поэтому грузы движутся как по неподвижной горке: груз m_2 опускается вертикально, груз m_1 поднимается вдоль гладкого склона. Сначала — обычная задача о связанных телах (второй закон Ньютона для каждого груза). Затем — равновесие клина: грузы и нить давят на клин и толкают его вбок, удерживает его только сила трения покоя стола. Клин стоит, пока нужная сила трения не превышает μN.

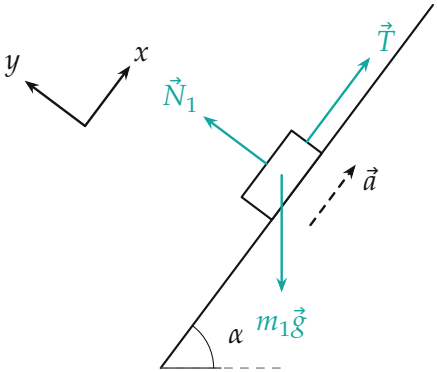
Обозначения. $\cos\alpha = \sqrt{1 - 0{,}8^2} = 0{,}6$. T — натяжение нити, одинаковое по обе стороны блока (блок лёгкий, трения в оси нет); a — модуль

ускорения грузов (нить нерастяжима, он у них общий); N_1 — сила реакции склона на груз m_1; N и $F_{тр}$ — нормальная реакция и сила трения стола на клин.

Пункт 1.

1. Груз m_1. Проверим направление движения: тянуть систему груз m_2 будет вниз, если $m_2 g > m_1 g \sin\alpha$, то есть $2 > 0{,}8$ — да. Груз m_1 едет вверх по склону. Оси: x — вдоль склона вверх (по ускорению), y — по нормали к склону (по ней ускорения нет, и из этой проекции найдём N_1). Второй закон Ньютона $m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T}$ в проекциях:

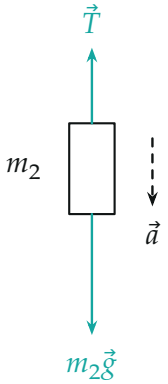
$$x:\ ma = T - mg\sin\alpha, \qquad y:\ 0 = N_1 - mg\cos\alpha.$$



Груз m_1: сила тяжести, реакция гладкого склона и натяжение нити вдоль склона; ось x — по ускорению.

2. Груз m_2. Он движется вниз с тем же по модулю ускорением. Второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось вниз:

$$2ma = 2mg - T.$$



Груз m_2: тяжесть больше натяжения, ускорение вниз.

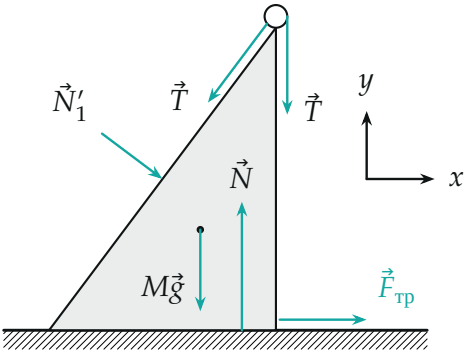
3. Ускорение. Сложим уравнения пунктов 1 и 2 — натяжение уйдёт:

$$3m\,a = 2mg - mg\sin\alpha \quad\Longrightarrow\quad a = \frac{2-\sin\alpha}{3}\,g = \frac{2-0{,}8}{3}\,g = 0{,}4\,g.$$

Отсюда натяжение $T = 2m(g-a) = 1{,}2\,mg$ и реакция склона $N_1 = mg\cos\alpha = 0{,}6\,mg$ — они понадобятся для клина.

Пункт 2.

4. Силы на клин вместе с блоком. Рассматриваем клин и блок как одно тело: тогда натяжения действуют на него через блок, а сила оси блока — внутренняя. На это тело действуют: $M\vec{g}$; сила давления груза m_1 на склон $\vec{N}_1'$ — по третьему закону Ньютона, равная N_1 и направленная в клин по нормали к склону; две силы натяжения на блок, обе по T: вдоль склона вниз (к грузу m_1) и вертикально вниз (к грузу m_2); со стороны стола — $\vec{N}$ вверх и $\vec{F}_{\text{тр}}$ вдоль стола.



Клин с блоком: давление груза m_1, два натяжения на блок, тяжесть, реакция и трение стола. Угол α здесь настоящий, $\sin\alpha = 0{,}8$.

5. Равновесие клина. Ось x — горизонтально вправо (от вершины склона к вертикальной грани), ось y — вверх. Нормаль склона, направленная в клин, имеет проекции $(\sin\alpha, -\cos\alpha)$, направление вниз по склону — $(-\cos\alpha, -\sin\alpha)$. Второй закон Ньютона для покоящегося клина, $\sum \vec{F} = 0$, в проекциях:

$$x:\ N_1\sin\alpha - T\cos\alpha + F_{\text{тр},x} = 0,$$

$$y:\ N - Mg - N_1\cos\alpha - T\sin\alpha - T = 0.$$

Подставим $N_1 = 0{,}6\,mg$, $T = 1{,}2\,mg$, $M = 2m$:

$$F_{\text{тр},x} = 1{,}2\cdot 0{,}6\,mg - 0{,}6\cdot 0{,}8\,mg = 0{,}24\,mg = \frac{6}{25}\,mg,$$

$$N = (2 + 0{,}6\cdot 0{,}6 + 1{,}2\cdot 0{,}8 + 1{,}2)\,mg = 4{,}52\,mg = \frac{113}{25}\,mg.$$

Знак плюс: трение направлено вправо — без него клин уехал бы влево, натяжение нити вдоль склона тянет его сильнее, чем груз давит в обратную сторону.

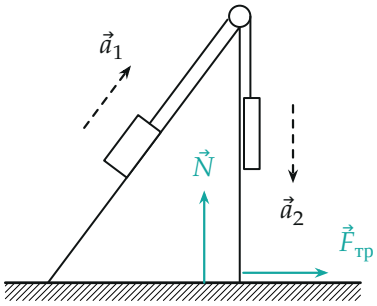
6. Тот же результат вторым способом — для системы «клин + блок + грузы». Внутренние силы (натяжение, давление на склон) уходят, внешние — тяжести всех тел, $\vec{N}$ и $\vec{F}_{\text{тр}}$. Второй закон Ньютона для системы: сумма внешних сил равна сумме $m_i\vec{a}_i$. Ускорение

есть только у грузов: у m_1 — $0{,}4g$ вдоль склона вверх, проекции $(0{,}4g\cos\alpha,\ 0{,}4g\sin\alpha)$; у m_2 — $0{,}4g$ вниз.

$$x:\ F_{\text{тр},x} = m\cdot 0{,}4g\cdot 0{,}6 = 0{,}24\,mg,$$

$$y:\ N - 5mg = m\cdot 0{,}4g\cdot 0{,}8 - 2m\cdot 0{,}4g \implies N = 4{,}52\,mg.$$

Оба способа совпали. Заметим: $N < 5mg$ — стол давят меньше полного веса, потому что центр масс системы ускоряется вниз.



Вся система: ускорения есть только у грузов; горизонтальную составляющую ускорения груза m_1 обеспечивает трение стола.

7. Условие покоя. Клин не скользит, пока нужная сила трения покоя не превышает её наибольшего значения μN:

$$0{,}24\,mg \le \mu\cdot 4{,}52\,mg \quad\implies\quad \mu \ge \frac{0{,}24}{4{,}52} = \frac{6}{113} \approx 0{,}053.$$

Обратите внимание: на клин действует не только давление груза N_1', но и натяжения нити через блок на его вершине; забыть их — значит получить трение не того знака и величины. Удобнее всего это видно во втором способе, где нить вообще не нужна.

Проверка. Размерность: μ — отношение двух сил, безразмерен. Предел: если бы $\sin\alpha = 1$ (склон вертикален), груз m_1 ехал бы вертикально, горизонтальных ускорений не было бы, и по второму способу $F_{\text{тр}} = 0$ — клин стоял бы и без трения. Два способа дали одно и то же. Смысл: сила трения сообщает системе горизонтальную составляющую ускорения груза m_1, поэтому трение нужно совсем небольшое.

Ответ. 1) $a = \dfrac{2 - \sin\alpha}{3} g = 0{,}4\,g$; 2) $\mu \geq \dfrac{6}{113} \approx 0{,}053$.