Четыре одинаковых резистора: собрать нужное сопротивление

Задача 5. [Физтех 2016/17, 9 класс, варианты 4–5, задача 5] Допустим, что в Вашем распоряжении есть четыре резистора с сопротивлением $R = 30$ Ом каждый.

1. Как следует соединить эти резисторы, чтобы сопротивление полученной цепочки было равно $R_0 = 3R/4$? Ответ подкрепите схемой соединения и расчётом эквивалентного сопротивления.
2. Собранную по Вашей схеме цепочку подключают к источнику постоянного напряжения $U = 90$ В. Какая наименьшая мощность P рассеивается на одном отдельно взятом резисторе? Сколько таких резисторов?



Поясняющий рисунок: четыре одинаковых резистора, из которых надо собрать цепочку.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на сборку цепи из одинаковых элементов. Нужное сопротивление $\frac{3}{4}R$ меньше R, а последовательное соединение сопротивление только увеличивает, — значит, на концах цепочки стоит параллельное соединение. Во втором пункте напряжение на параллельных ветвях общее, а мощность $P = U_R^2/R$ — меньше всего греется резистор с наименьшим напряжением.

Обозначения. A и B — концы цепочки; $R_1, \dots, R_4$ — номера одинаковых резисторов; I — ток через цепочку; $U_{AB} = U$.

Пункт 1.

1. Подбор схемы. Для параллельного соединения складываются обратные сопротивления:

$$\frac{1}{R_0} = \frac{4}{3R} = \frac{1}{R} + \frac{1}{3R}.$$

Слагаемое $\frac{1}{R}$ — одна ветвь из одного резистора, $\frac{1}{3R}$ — ветвь сопротивлением $3R$, то есть три оставшихся резистора последовательно. Итак: R_1, R_2, R_3 последовательно, и эта цепочка параллельно R_4.

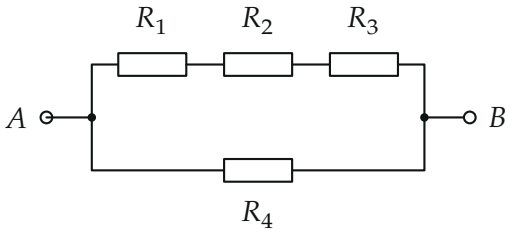


Схема соединения: три резистора последовательно, параллельно им — четвёртый.

2. Расчёт эквивалентного сопротивления. Последовательная ветвь: $R_{123} = 3R$. Параллельно с R_4:

$$R_{AB} = \frac{3R \cdot R}{3R + R} = \frac{3}{4}R = R_0 = 22{,}5 \text{ Ом}.$$

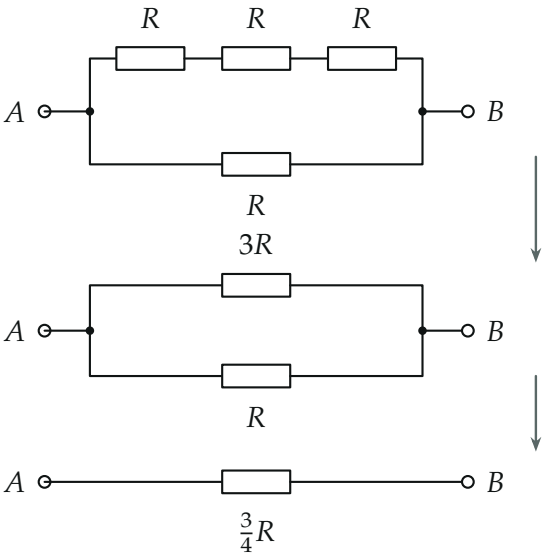
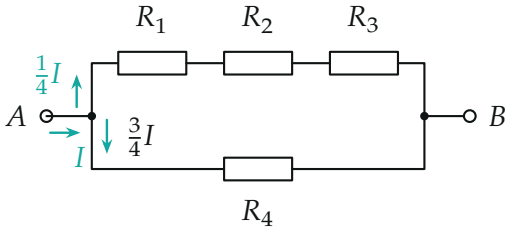


Схема сворачивается за два шага: последовательная ветвь, затем параллельное соединение.

Пункт 2.

3. Напряжения и токи. Обе ветви подключены прямо к A и B, поэтому напряжение на каждой равно $U = 90$ В. Через R_4 идёт ток $U/R = 3$ А, через последовательную ветвь — $U/(3R) = 1$ А; полный ток $I = 4$ А$= U/R_0$ — сходится. На каждом резисторе ветви напряжение $U/3 = 30$ В (ток один, сопротивления равны).

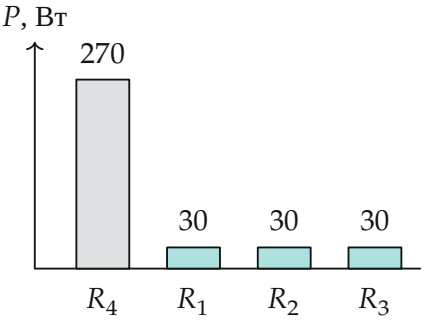


Токи: полный ток I делится в отношении $1:3$ — в длинную ветвь идёт четверть.

4. Мощности. По закону Джоуля — Ленца $P = U_k^2/R$:

$$P_4 = \frac{U^2}{R} = 270\text{ Вт}, \qquad P_1 = P_2 = P_3 = \frac{(U/3)^2}{R} = \frac{U^2}{9R} = 30\text{ Вт}.$$

Наименьшая мощность 30 Вт — на каждом из трёх резисторов последовательной ветви. Проверка суммой: $270 + 3 \cdot 30 = 360$ Вт $= U^2/R_0 = 90^2/22{,}5$.



Мощности на резисторах, Вт; наименьшая (бирюзой) — на трёх резисторах длинной ветви.

Обратите внимание: в параллельном соединении сильнее греется ветвь с меньшим сопротивлением — одиночный R_4 выделяет в 9 раз больше каждого резистора длинной ветви.

Проверка. Размерность: U^2/R — $\text{В}^2/\text{Ом} = \text{Вт}$. Второй способ для P_1: $P_1 = I_1^2 R = 1^2 \cdot 30 = 30$ Вт — то же. Сумма мощностей совпала с мощностью всей цепи.

Ответ. 1) R_1, R_2, R_3 последовательно, эта цепочка параллельно R_4: $R_0 = \dfrac{3R \cdot R}{3R + R} = \dfrac{3}{4}R$; 2) $P = \dfrac{U^2}{9R} = 30$ Вт, таких резисторов три.