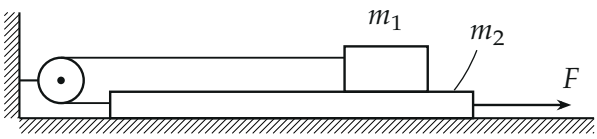
Брусок и доска с нитью через блок, сила на доске

Задача 1. [Физтех 2017/18, 10 класс, задача 1] Систему из бруска массой $m_1 = m$ и доски массой $m_2 = 2m$, находящихся на горизонтальном столе, приводят в движение, прикладывая к доске горизонтальную силу F (см. рис.). Коэффициент трения между столом и доской и между горизонтальной поверхностью доски и бруском равен μ. Массой горизонтально натянутой нити, массой блока и трением в его оси пренебречь.

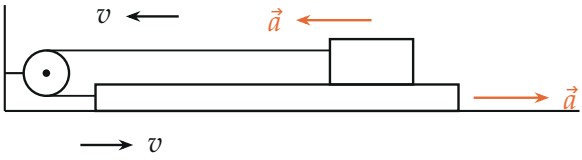


1. Найти ускорение a_1 доски, если бы не было трения.
2. Найти ускорение a_2 доски, если есть трение и параметры F, m, μ подобраны так, что есть движение.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача о связанных телах. Блок закреплён на стене, нить огибает его: верхний конец привязан к бруску, нижний — к доске. Доска едет вправо, нить вытягивается снизу и затягивает брусок влево с тем же по модулю ускорением. Брусок и доска движутся навстречу друг другу, поэтому брусок по доске скользит, и при наличии трения на доску действует трение сразу с двух сторон: от бруска сверху и от стола снизу. Для каждого тела запишем второй закон Ньютона, нить даёт уравнение связи.

Обозначения. Ось x для доски — вправо, ось x' для бруска — влево (по движению каждого тела); a — модуль ускорения тел; T — сила натяжения нити; N_1 — сила реакции доски на брусок, N_2 — сила реакции стола на доску.

1. Связь ускорений. Длина нити постоянна, блок неподвижен. Если доска сместилась вправо на Δx, нижний участок нити удлинился на Δx, значит, верхний укоротился на Δx и брусок сместился влево на Δx. Модули скоростей и ускорений бруска и доски одинаковы; брусок относительно доски движется влево со скоростью $2v$.



Нить через неподвижный блок: верхний участок уходит влево со скоростью v, нижний — вправо с той же скоростью. Ускорения бруска и доски равны по модулю и противоположны.

Пункт 1 (без трения).

2. Второй закон Ньютона для бруска в проекции на ось x': горизонтально на брусок действует только нить, $T = ma_1$.

3. Второй закон Ньютона для доски в проекции на ось x: вправо тянет F, влево — нижний участок нити, $F - T = 2ma_1$.

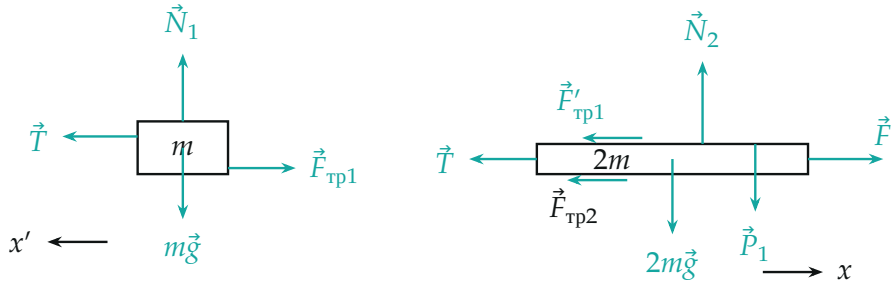
4. Решение. Складываем уравнения, T уходит:

$$F = 3ma_1 \;\Rightarrow\; a_1 = \frac{F}{3m}.$$

Сила F разгоняет обе массы, хотя тела едут в разные стороны: нить через блок лишь меняет направление силы.

Пункт 2 (с трением).

5. Силы трения. Брусок скользит по доске влево, поэтому сила трения на брусок направлена вправо, а по третьему закону Ньютона на доску со стороны бруска — влево; $N_1 = mg$, $F_{тр1} = \mu mg$. Доска скользит по столу вправо, трение стола на неё — влево. Доску прижимают к столу её вес и брусок: $N_2 = 2mg + N_1 = 3mg$, $F_{тр2} = 3\mu mg$.



Силы на брусок (слева) и на доску (справа). $\vec{P}_1$ — давление бруска на доску, $|\vec{P}_1| = N_1$; $\vec{F}'_{тр1}$ — трение со стороны бруска, $\vec{F}_{тр2}$ — трение стола.

6. Второй закон Ньютона для бруска в проекции на ось x' (влево):

$$T - \mu mg = ma_2.$$

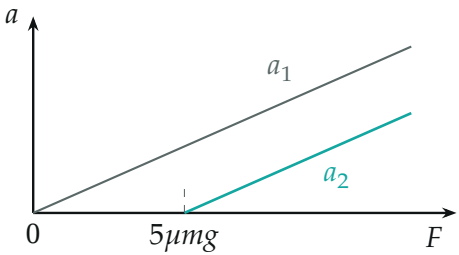
7. Второй закон Ньютона для доски в проекции на ось x (вправо):

$$F - T - \mu mg - 3\mu mg = 2ma_2.$$

8. Решение. Складываем уравнения:

$$F - 5\mu mg = 3ma_2 \;\Rightarrow\; a_2 = \frac{F - 5\mu mg}{3m}.$$

Движение есть при $F > 5\mu mg$; тогда $a_2 > 0$.



Ускорение доски от силы F: без трения $a_1 = F/(3m)$; с трением прямая той же крутизны сдвинута на $5\mu mg$ — до этого значения система стоит.

Обратите внимание. Трение между бруском и доской входит в уравнения *дважды*: оно тормозит брусок и тормозит доску. Тела движутся навстречу, и пара сил трения отнимает энергию у обоих. Отсюда $5\mu mg = \mu mg + \mu mg + 3\mu mg$, а не $4\mu mg$, как было бы, если сложить веса.

Ответ (матрёшкой).

$$a_2 = \frac{F - \mu(3m_1 + m_2)g}{m_1 + m_2}, \qquad \mu = 0:\; a_1 = \frac{F}{m_1 + m_2}.$$

Проверка. Размерность: F/m и μg — ускорения. Предел $\mu \to 0$: $a_2 \to F/(3m) = a_1$, ответы двух пунктов согласованы. Второй способ для пункта 2 — мощность: работа силы F за время Δt идёт на кинетическую энергию $\frac{1}{2}\cdot 3mv^2$ и на тепло; тепло трения бруска о доску $\mu mg\cdot 2v\Delta t$ (относительная скорость $2v$), стола о доску $3\mu mg\cdot v\Delta t$. Тогда $Fv = 3mva_2 + 5\mu mgv$ — то же уравнение.

Смысл: из-за блока брусок и доска трутся друг о друга с удвоенной относительной скоростью, и трение между ними работает вдвойне.

Ответ. 1) $a_1 = \dfrac{F}{3m}$; 2) $a_2 = \dfrac{F-5\mu mg}{3m}$.