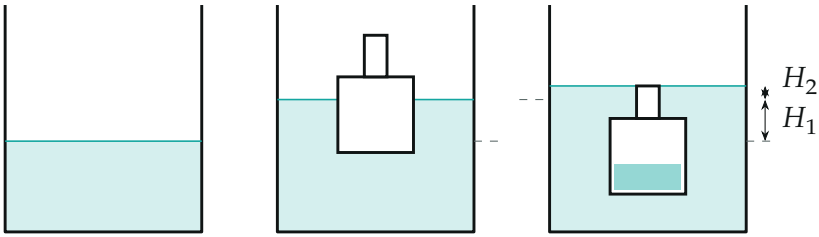
Бутылка плавает и тонет

Задача 2. [Физтех 2017/18, 10 класс, задача 2] Пустую стеклянную бутылку опускают в цилиндрический сосуд с водой с вертикальными стенками. Бутылка стала плавать, а уровень воды в сосуде поднялся на $H_1 = 3$ см. Затем в бутылку медленно наливают воду. Когда масса налитой воды достигает некоторой величины, бутылка начинает тонуть. Уровень воды в сосуде за время наливания поднялся ещё на $H_2 = 1$ см. Плотность стекла $\rho_0 = 3$ г/см^3, плотность воды $\rho = 1$ г/см^3. Площадь внутреннего сечения сосуда $S = 250$ см^2.

1. Найти массу пустой бутылки.
2. Найти массу воды, налитой в бутылку.
3. Найти вместимость пустой бутылки.



Поясняющий рисунок (подъёмы уровня показаны крупнее, чем на самом деле): уровень воды до опускания бутылки, при плавании пустой бутылки и в момент, когда бутылка с налитой водой погрузилась целиком.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на условие плавания и закон Архимеда. Главная идея: подъём уровня воды в сосуде с вертикальными стенками измеряет объём погружённой части, $\Delta V = S\,\Delta H$, а сила Архимеда равна весу воды этого объёма. Плавающее тело в равновесии: сила Архимеда равна силе тяжести. Бутылка «начинает тонуть», когда погрузилась целиком (вместе с горлышком): дальше выталкивающая сила расти не может.

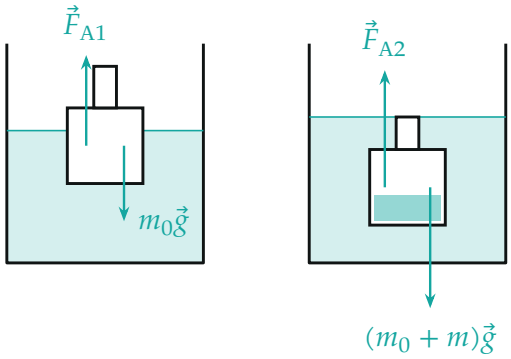
Обозначения. m_0 — масса пустой бутылки, m — масса налитой воды, V — вместимость бутылки (объём полости), $V_0 = m_0/\rho_0$ — объём стекла.

1. Почему подъём уровня даёт объём погружённой части. Воды в сосуде столько же, сколько было; уровень поднялся потому, что часть сосуда ниже уровня занимает погружённая бутылка. Сосуд цилиндрический, поэтому объём погружённой части $V_{\text{погр}} = S\,\Delta H$, где ΔH — подъём уровня по сравнению с сосудом без бутылки. Налитая в бутылку вода берётся извне, её объём на уровень снаружи не влияет — влияет только то, насколько глубже села бутылка.

Пункт 1.

2. Равновесие пустой бутылки. На плавающую бутылку действуют сила тяжести $m_0\vec{g}$ и сила Архимеда $\vec{F}_{\text{A1}}$. Ускорения нет, второй закон Ньютона в проекции на вертикаль:

$$F_{\text{A1}} - m_0 g = 0, \qquad F_{\text{A1}} = \rho g\, SH_1 \;\Rightarrow\; m_0 = \rho S H_1 = 1 \cdot 250 \cdot 3 = 750 \text{ г}.$$



Силы на бутылку: слева — пустая плавает, справа — с налитой водой, погружена целиком.

Пункт 2.

3. Равновесие бутылки с водой в момент полного погружения. Масса бутылки с водой $m_0 + m$, погружённый объём $S(H_1 + H_2)$:

$$\rho g\, S(H_1 + H_2) = (m_0 + m)g.$$

Вычитаем равенство из шага 2: $\rho S H_2 = m$, то есть

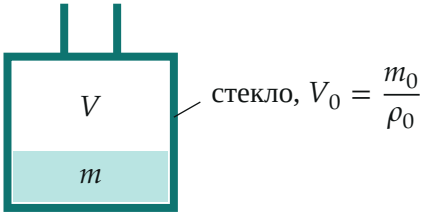
$$m = \rho S H_2 = 1 \cdot 250 \cdot 1 = 250 \text{ г}.$$

Каждый грамм налитой воды заставляет бутылку вытеснить ещё грамм воды.

Пункт 3.

4. Что составляет погружённый объём. Когда бутылка погружена целиком, она вытесняет воду и стеклом, и полостью (внутри полости — налитая вода и воздух, но снаружи эта полость тоже занимает место):

$$S(H_1 + H_2) = V_0 + V = \frac{m_0}{\rho_0} + V.$$



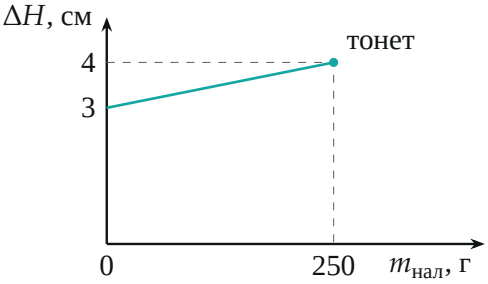
Бутылка в момент полного погружения вытесняет объём $V_0 + V$: стенки и полость (с налитой водой массы m).

5. Вместимость.

$$V = S(H_1 + H_2) - \frac{m_0}{\rho_0} = 250 \cdot 4 - \frac{750}{3} = 1000 - 250 = 750 \text{ см}^3.$$

В общем виде, подставив $m_0 = \rho S H_1$:

$$V = S\left(\frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0} H_1 + H_2\right).$$



Подъём уровня в сосуде от массы налитой воды: $\Delta H = (m_0 + m_{нал})/(\rho S)$, линейно до момента полного погружения.

Обратите внимание. Налитая вода находится внутри бутылки и в объём $V_0 + V$ отдельно не добавляется: полость вытесняет внешнюю воду целиком, что бы в ней ни было. Ошибка — прибавить к вытесненному объёму ещё и m/ρ.

Ответ (матрёшкой).

$$m_0 = \rho S H_1, \qquad m = \rho S H_2, \qquad V = S(H_1 + H_2) - \frac{\rho S H_1}{\rho_0}.$$

Проверка. Размерности: ρSH — масса, SH — объём. Предел $\rho_0 \to \infty$ (стекло бесконечно тонкое): $V \to S(H_1 + H_2)$ — весь вытесненный объём приходится на полость, верно. Проверка равновесия: $(m_0+m)g = 1000\,\text{г} \cdot g$, $\rho(V_0 + V)g = (250 + 750)\,\text{г} \cdot g$ — совпадает.

Смысл: подъём уровня — «весы»: каждый сантиметр в этом сосуде соответствует 250 г массы плавающего тела.

Ответ. 1) $m_0 = \rho S H_1 = 750$ г; 2) $m = \rho S H_2 = 250$ г; 3) $V = 750$ см^3.