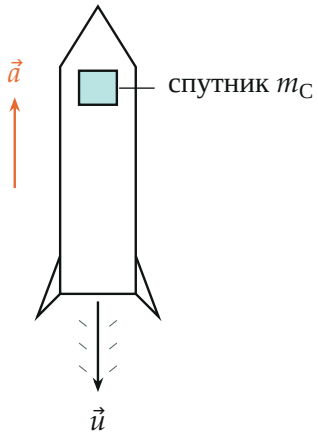
Ракета: вес спутника в полёте

Задача 3. [Физтех 2017/18, 10 класс, задача 3] Ракета стартует вертикально. К $t_1 = 30$ с полёта вес выводимого на орбиту спутника увеличился в $k_1 = 1{,}5$ раза (относительно веса перед стартом), к $t_2 = 60$ с полёта вес спутника был уже в $k_2 = 2{,}0$ раза больше, чем перед стартом. Считать массовый расход топлива постоянным. Сопротивлением воздуха и изменением ускорения свободного падения с высотой пренебречь. Принять $g = 10$ м/с^2.

1. Найти ускорение ракеты в момент времени t_1.
2. Определите скорость u вытекания продуктов сгорания относительно сопла, считая её постоянной.



Поясняющий рисунок: ракета разгоняется вверх с ускорением $\vec{a}$, газы вылетают из сопла со скоростью $\vec{u}$ относительно ракеты.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача о движении тела переменной массы. Вес спутника — сила, с которой он давит на опору в ракете. Пока ракета стоит, вес $m_C g$; при разгоне вверх опора должна сообщить спутнику ещё и ускорение, и вес растёт: «перегрузка» прямо даёт ускорение ракеты (пункт 1). Ускорение же создаёт реактивная сила μu, а масса ракеты уменьшается линейно — поэтому перегрузка со временем растёт.

Два момента времени дают два уравнения на неизвестные начальную массу и u (пункт 2).

Обозначения. Ось y направлена вверх. m_C — масса спутника, N — сила реакции опоры на спутник (вес $P = N$ по третьему закону Ньютона), a — ускорение ракеты, m_0 — масса ракеты на старте, μ — массовый расход топлива, $m = m_0 - \mu t$ — масса ракеты в момент t, $k = P/(m_C g)$ — во сколько раз вырос вес.

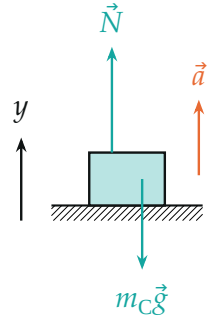
Пункт 1.

1. Второй закон Ньютона для спутника в проекции на ось y. На спутник действуют сила тяжести $m_C\vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$; спутник движется вместе с ракетой с ускорением a:

$$N - m_C g = m_C a \;\Rightarrow\; P = N = m_C(g + a).$$

До старта $a = 0$ и $P_0 = m_C g$. Значит,

$$k = \frac{P}{P_0} = \frac{g + a}{g} \;\Rightarrow\; a = (k - 1)g, \qquad a_1 = (1{,}5 - 1) \cdot 10 = 5 \text{ м/с}^2.$$



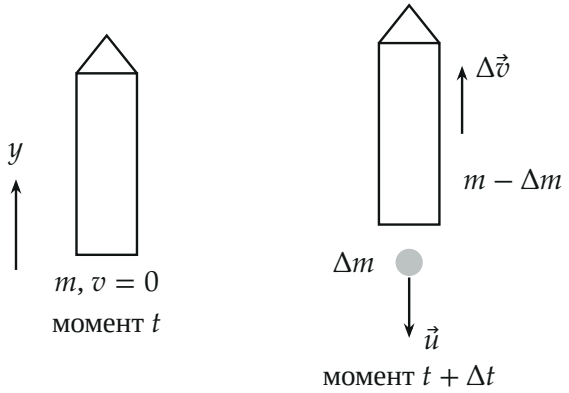
Силы на спутник в ракете: $N > m_C g$, потому что опора ещё и разгоняет его.

Пункт 2.

2. Закон сохранения импульса для ракеты с топливом за малое время Δt. Перейдём в инерциальную систему отсчёта, где в момент t ракета покоится (скорость Земли не важна, важно изменение импульса).

За время Δt из сопла выходит масса газа $\Delta m = \mu \Delta t$ со скоростью u вниз, ракета массы $m - \Delta m$ приобретает скорость Δv вверх. Внешняя сила — тяжесть, её импульс $-mg\Delta t$. Изменение проекции импульса на ось y:

$$(m - \Delta m)\Delta v - \Delta m\, u - 0 = -mg\,\Delta t.$$



Импульс ракеты и вылетевшей порции газа Δm за время Δt в системе отсчёта, где в момент t ракета покоилась.

Делим на Δt и отбрасываем малое $\Delta m\,\Delta v$; $\Delta v/\Delta t = a$, $\Delta m/\Delta t = \mu$:

$$ma = \mu u - mg \;\Rightarrow\; m(g + a) = \mu u.$$

Реактивная сила μu постоянна, а масса m падает — поэтому ускорение растёт.

3. Перегрузка через массу ракеты. Из шага 1 $g + a = kg$, тогда

$$(m_0 - \mu t)\, kg = \mu u \;\Rightarrow\; k = \frac{u}{g\,(\tau - t)}, \qquad \tau = \frac{m_0}{\mu}.$$

Здесь τ — время, за которое сгорела бы вся масса ракеты; k растёт гиперболой.

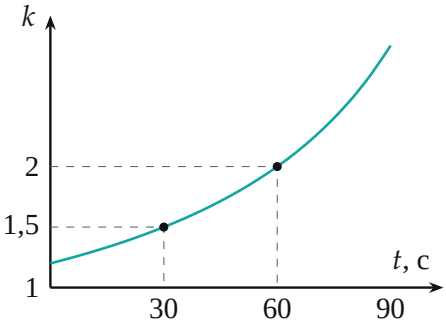
4. Два момента времени.

$$k_1(\tau - t_1) = \frac{u}{g} = k_2(\tau - t_2),$$

$$\tau = \frac{k_2 t_2 - k_1 t_1}{k_2 - k_1} = \frac{2 \cdot 60 - 1{,}5 \cdot 30}{0{,}5} = 150 \text{ с}.$$

$$u = k_1 g(\tau - t_1) = \frac{k_1 k_2 g\,(t_2 - t_1)}{k_2 - k_1} = \frac{1{,}5 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 30}{0{,}5} = 1800 \text{ м/с}.$$

Проверка вторым моментом: $k_2 g(\tau - t_2) = 2 \cdot 10 \cdot 90 = 1800$ м/с — то же.



Перегрузка $k(t) = \dfrac{u}{g(\tau - t)}$ при $u = 1800$ м/с, $\tau = 150$ с (ось k начинается с 1); точки — данные условия.

Обратите внимание. Сразу после старта $k = u/(g\tau) = 1{,}2$, а не 1: вес скачком растёт в момент включения двигателя, потому что тяга сразу больше силы тяжести. «Вес перед стартом» в условии — это $m_C g$, когда ракета стоит.

Ответ (матрёшкой). $a_1 = (k_1 - 1)g$, $u = \dfrac{k_1 k_2 g\,(t_2 - t_1)}{k_2 - k_1}$.

Проверка. Размерность: $g\,t$ — скорость. Предельный случай $k_2 \to k_1$ (вес не меняется, значит, масса почти не меняется за время $t_2 - t_1$, топливо легче ракеты): $u \to \infty$ — чтобы тянуть ракету с почти постоянной массой, газ должен вылетать бесконечно быстро; верно. Значение 1,8 км/с — типичная скорость истечения химических двигателей.

Смысл: перегрузка спутника — это прибор, по которому можно найти скорость истечения газов, не заглядывая в двигатель.

Ответ. 1) $a_1 = (k_1 - 1)g = 5$ м/с^2; 2) $u = \dfrac{k_1 k_2 g\,(t_2 - t_1)}{k_2 - k_1} = 1800$ м/с.