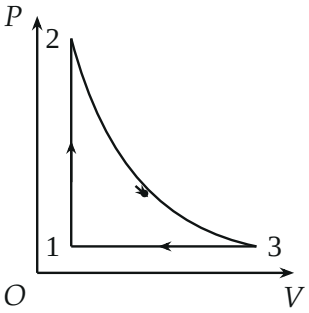
Цикл: изохора, адиабата, изобара

Задача 5. [Физтех 2017/18, 10 класс, задача 5] Одноатомный идеальный газ нагревается в изохорическом процессе 1–2, затем расширяется в адиабатическом процессе 2–3 и сжимается в изобарическом процессе 3–1 (см. рис.). Отношение работы газа A_{23} в процессе 2–3 к работе над газом A_{31} ($A_{31} > 0$) в процессе 3–1 равно $\dfrac{A_{23}}{A_{31}} = \dfrac{36}{7}$. В процессе сжатия объём газа уменьшается в 8 раз.



1. Найти отношение температур T_2/T_3 в состояниях 2 и 3.
2. Найти КПД цикла.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на первый закон термодинамики для цикла. В адиабате 2–3 тепла нет, и работа газа равна убыли внутренней энергии — она выражается через $T_2 - T_3$. В изобаре 3–1 работа над газом выражается через $T_3 - T_1$, а отношение T_3/T_1 даёт сжатие в 8 раз. Отношение работ свяжет T_2 с T_1. Для КПД: тепло газ получает только на изохоре 1–2, отдаёт — только на изобаре 3–1.

Обозначения. ν — количество вещества, $C_V = \frac{3}{2}R$ и $C_P = \frac{5}{2}R$ — молярные теплоёмкости одноатомного газа, p_1 — давление на изобаре, V_1 — объём в состояниях 1 и 2, $V_3 = 8V_1$, Q_{ij} — теплота, полученная газом в процессе i–j.

Пункт 1.

1. Изобара 3–1. Давление постоянно, по уравнению Менделеева–Клапейрона $T \propto V$:

$$\frac{T_3}{T_1} = \frac{V_3}{V_1} = 8 \;\Rightarrow\; T_3 = 8T_1.$$

Работа внешних сил над газом при сжатии:

$$A_{31} = p_1(V_3 - V_1) = \nu R(T_3 - T_1) = 7\nu R T_1.$$

2. Адиабата 2–3. Первый закон термодинамики $Q = \Delta U + A$ при $Q_{23} = 0$:

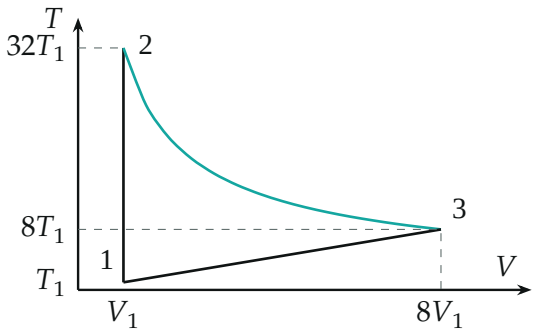
$$0 = \nu C_V(T_3 - T_2) + A_{23} \;\Rightarrow\; A_{23} = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_3).$$

3. Отношение работ.

$$\frac{A_{23}}{A_{31}} = \frac{\frac{3}{2}(T_2 - T_3)}{7T_1} = \frac{36}{7} \;\Rightarrow\; T_2 - T_3 = 24T_1, \quad T_2 = 32T_1.$$

$$\frac{T_2}{T_3} = \frac{32T_1}{8T_1} = 4.$$

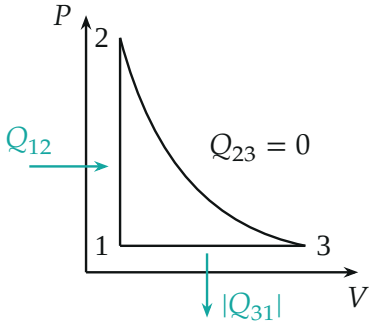
Второй способ (уравнение адиабаты). Для одноатомного газа $TV^{\gamma-1} = TV^{2/3} = \text{const}$; $V_2 = V_1$, $V_3 = 8V_1$: $T_2/T_3 = (V_3/V_2)^{2/3} = 8^{2/3} = 4$. Данные условия согласованы.



Цикл в осях T–V по вычисленным точкам: изохора 1–2, адиабата 2–3 ($T \propto V^{-2/3}$), изобара 3–1 ($T \propto V$).

Пункт 2.

4. Где газ получает и где отдаёт тепло. Изохора 1–2: работы нет, температура растёт — $Q_{12} = \nu C_V(T_2 - T_1) > 0$. Адиабата 2–3: $Q_{23} = 0$. Изобара 3–1: температура падает и газ сжимается — $Q_{31} = \nu C_P(T_1 - T_3) < 0$, газ отдаёт тепло.



Тепло газ получает только на изохоре 1–2 и отдаёт только на изобаре 3–1.

5. КПД. За цикл $\Delta U = 0$, работа газа за цикл $A = Q_{12} + Q_{31}$:

$$\eta = \frac{A}{Q_{12}} = 1 - \frac{|Q_{31}|}{Q_{12}} = 1 - \frac{\frac{5}{2}(T_3 - T_1)}{\frac{3}{2}(T_2 - T_1)},$$

$$\eta = 1 - \frac{\frac{5}{2} \cdot 7}{\frac{3}{2} \cdot 31} = 1 - \frac{35}{93} = \frac{58}{93} \approx 0{,}62.$$

Второй способ (через работы). Работа газа за цикл: на изохоре ноль, на адиабате $+A_{23} = 36\nu RT_1$, на изобаре $-A_{31} = -7\nu RT_1$; итого $A = 29\nu RT_1$. $Q_{12} = \frac{3}{2}\nu R \cdot 31T_1 = 46{,}5\,\nu RT_1$. $\eta = 29/46{,}5 = 58/93$ — то же.



Баланс энергии за цикл в единицах νRT_1: полученное тепло Q_{12} делится на работу A и отданное тепло $|Q_{31}|$.

Обратите внимание. В условии A_{31} — работа *над* газом, она положительна; работа самого газа на изобаре $-A_{31}$. Перепутав знак, получим $T_2 - T_3 = 24T_1$ с минусом и бессмыслицу $T_2 < T_3$ на адиабатическом расширении.

Ответ (матрёшкой).

$$\frac{T_2}{T_3} = 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{A_{23}}{A_{31}} \cdot \frac{T_3 - T_1}{T_3} = 4,$$

$$\eta = 1 - \frac{C_P(T_3 - T_1)}{C_V(T_2 - T_1)} = \frac{58}{93}.$$

Проверка. Отношения безразмерны. КПД меньше КПД Карно между крайними температурами: $1 - T_1/T_2 = 31/32 \approx 0{,}97$ — верно, $0{,}62 < 0{,}97$. Сходится и уравнение адиабаты (второй способ пункта 1).

Смысл: большое отношение работ $36/7$ означает сильный нагрев на изохоре, а значит, высокий КПД цикла.

Ответ. 1) $\dfrac{T_2}{T_3} = 4$; 2) $\eta = \dfrac{58}{93} \approx 0{,}62$.