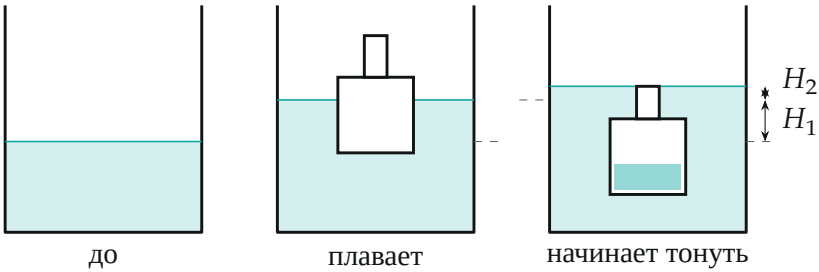
Колба плавает и тонет

Задача 2. [Физтех 2017/18, 10 класс, задача 2] Пустую стеклянную колбу массой $m_0 = 750$ г и вместимостью $V = 0{,}8$ л опускают в цилиндрический сосуд с водой. Стенки сосуда вертикальны. Колба стала плавать, а уровень воды в сосуде поднялся на некоторую высоту H_1. Затем в колбу медленно наливают воду. Когда масса налитой воды достигает $m = 250$ г, колба начинает тонуть. Уровень воды в сосуде за время наливания поднялся ещё на H_2. Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3. Площадь внутреннего сечения сосуда $S = 250$ см^2.

1. Найти H_1.
2. Найти H_2.
3. Найти плотность стекла колбы.



Поясняющий рисунок (подъёмы уровня показаны крупнее, чем на самом деле): уровень воды до опускания колбы, при плавании пустой колбы и в момент, когда колба с налитой водой погрузилась целиком.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на условие плавания и закон Архимеда. Главная идея: подъём уровня воды в сосуде с вертикальными стенками измеряет объём погружённой части, $\Delta V = S\,\Delta H$, а сила Архимеда равна весу воды этого объёма. Плавающее тело в равновесии: сила Архимеда равна силе тяжести. Колба «начинает тонуть», когда погрузилась целиком (вместе с горлышком): дальше выталкивающая сила расти не может.

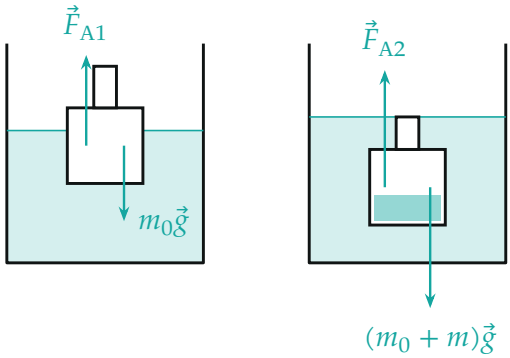
Обозначения. m_0 — масса пустой колбы, m — масса налитой воды, V — вместимость колбы (объём полости), ρ_0 — искомая плотность стекла, $V_0 = m_0/\rho_0$ — объём стекла.

1. Почему подъём уровня даёт объём погружённой части. Воды в сосуде столько же, сколько было; уровень поднялся потому, что часть сосуда ниже уровня занимает погружённая колба. Сосуд цилиндрический, поэтому объём погружённой части $V_{\text{погр}} = S\Delta H$, где ΔH — подъём уровня по сравнению с сосудом без колбы. Налитая в колбу вода берётся извне, её объём на уровень снаружи не влияет — влияет только то, насколько глубже села колба.

Пункт 1.

2. Равновесие пустой колбы. На плавающую колбу действуют сила тяжести $m_0\vec{g}$ и сила Архимеда $\vec{F}_{\text{A1}}$. Ускорения нет, второй закон Ньютона в проекции на вертикаль:

$$F_{\text{A1}} - m_0 g = 0, \qquad F_{\text{A1}} = \rho g S H_1 \;\Rightarrow\; H_1 = \frac{m_0}{\rho S} = \frac{750}{1 \cdot 250} = 3 \text{ см}.$$



Силы на колбу: слева — пустая плавает, справа — с налитой водой, погружена целиком.

Пункт 2.

3. Равновесие колбы с водой в момент полного погружения. Масса колбы с водой $m_0 + m$, погружённый объём $S(H_1 + H_2)$:

$$\rho g\, S(H_1 + H_2) = (m_0 + m)g.$$

Вычитаем равенство из шага 2: $\rho S H_2 = m$, то есть

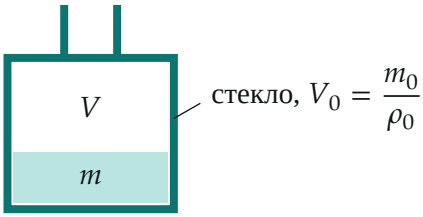
$$H_2 = \frac{m}{\rho S} = \frac{250}{1 \cdot 250} = 1 \text{ см}.$$

Каждый грамм налитой воды заставляет колбу вытеснить ещё грамм воды.

Пункт 3.

4. Что составляет погружённый объём. Когда колба погружена целиком, она вытесняет воду и стеклом, и полостью (внутри полости — налитая вода и воздух, но снаружи эта полость тоже занимает место):

$$S(H_1 + H_2) = V_0 + V = \frac{m_0}{\rho_0} + V.$$

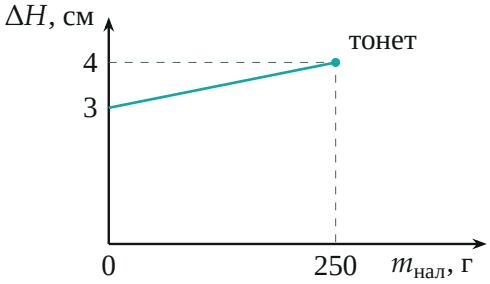


Колба в момент полного погружения вытесняет объём $V_0 + V$: стенки и полость (с налитой водой массы m).

5. Плотность стекла. Объём стекла $V_0 = S(H_1 + H_2) - V$, а $S(H_1 + H_2) = (m_0 + m)/\rho$ из шага 3:

$$V_0 = \frac{m_0 + m}{\rho} - V = 1000 - 800 = 200 \text{ см}^3,$$

$$\rho_0 = \frac{m_0}{V_0} = \frac{\rho\, m_0}{m_0 + m - \rho V} = \frac{750}{200} = 3{,}75 \text{ г/см}^3.$$



Подъём уровня в сосуде от массы налитой воды: $\Delta H = (m_0 + m_{нал})/(\rho S)$, линейно до момента полного погружения.

Обратите внимание. Налитая вода находится внутри колбы и в объём $V_0 + V$ отдельно не добавляется: полость вытесняет внешнюю воду целиком, что бы в ней ни было. Ошибка — прибавить к вытесненному объёму ещё и m/ρ.

Ответ (матрёшкой).

$$H_1 = \frac{m_0}{\rho S}, \qquad H_2 = \frac{m}{\rho S}, \qquad \rho_0 = \frac{\rho\, m_0}{m_0 + m - \rho V}.$$

Проверка. Размерности: $m/(\rho S)$ — длина, $\rho m_0/m$ — плотность. Знак: ρ_0 конечна и положительна только при $m_0 + m > \rho V$ — тонуть колба начинает, когда её масса с водой превысит массу воды объёма полости; здесь 1000 г $>$ 800 г. Значение 3,75 г/см^3 правдоподобно для тяжёлого (свинцового) стекла. Проверка равновесия: $\rho(V_0 + V)g = (200 + 800)\text{ г} \cdot g = (m_0 + m)g$ — совпадает.

Смысл: подъём уровня — «весы»: каждый сантиметр в этом сосуде соответствует 250 г массы плавающего тела.

Ответ. 1) $H_1 = \dfrac{m_0}{\rho S} = 3$ см; 2) $H_2 = \dfrac{m}{\rho S} = 1$ см; 3) $\rho_0 = \dfrac{\rho m_0}{m_0 + m - \rho V} = 3{,}75$ г/см^3.