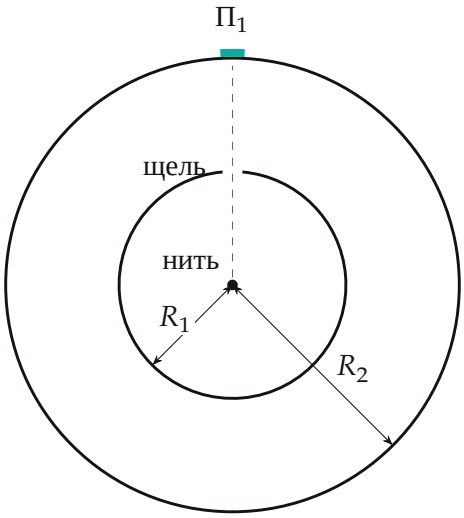
Опыт Штерна с серебряной нитью

Задача 3. [Физтех 2017/18, 10 класс, задача 3] Два коаксиальных цилиндра разного радиуса $R_1 = 10$ см и $R_2 = 20$ см помещены в вакуум. Вдоль образующей внутреннего цилиндра имеется узкая щель. Вдоль оси системы натянута платиновая проволочка, покрытая тонким слоем серебра. Если проволочку с помощью электротока раскалить, то образуется налёт в виде полосы на боковой поверхности внешнего цилиндра напротив щели. Цилиндры приводят во вращение вокруг их общей оси с угловой скоростью $\omega = 2000$ с$^{-1}$. В результате на боковой поверхности внешнего цилиндра образуется ещё одна полоса налёта, смещённая относительно первой на $S = 8$ см (расстояние отсчитывается вдоль боковой поверхности). Относительную атомную массу серебра считать $A = 100$.

1. Найти среднее время пролёта атомом промежутка между цилиндрами.
2. Найти среднюю скорость атомов серебра.
3. Найти температуру нити.



Поясняющий рисунок (сечение плоскостью, перпендикулярной оси): нить на оси, щель во внутреннем цилиндре, полоса налёта $П_1$ на внешнем цилиндре напротив щели, когда цилиндры неподвижны.

▲ **Решение. Что происходит.** Это опыт Штерна — прямое измерение скорости молекул. Атомы серебра вылетают из горячей нити во все стороны; через щель проходит узкий пучок, летящий по радиусу. Без вращения пучок оседает точно напротив щели. При вращении за время пролёта от щели до внешнего цилиндра внешний цилиндр успевает повернуться, и атомы оседают на другом месте поверхности — в стороне, противоположной вращению. Смещение полосы измеряет время пролёта, отсюда скорость; температуру даёт связь средней кинетической энергии атома с температурой.

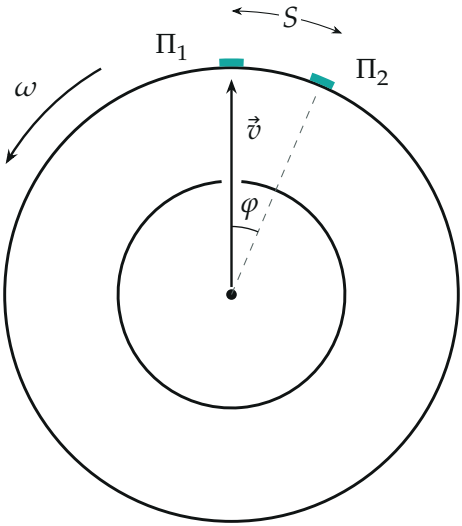
Обозначения. t — время пролёта от щели (радиус R_1) до внешнего цилиндра (радиус R_2), v — скорость атома, φ — угол поворота цилиндров за время t, m_0 — масса атома серебра, $M = 100$ г/моль — его молярная масса, k — постоянная Больцмана, R — газовая постоянная, N_A — число Авогадро.

Пункт 1.

1. Движение атома в лабораторной системе отсчёта. В вакууме сил на атом нет (сила тяжести за 10^{-4} с сдвинет его на $\sim 10^{-7}$ м — пренебрежимо): атом летит по радиусу прямолинейно и равномерно. Щель лишь «пропускает» атомы, скорость им не сообщает.

2. Поворот внешнего цилиндра. Пока атом летит от R_1 до R_2, цилиндры поворачиваются на угол $\varphi = \omega t$. Точка внешнего цилиндра, которая была напротив щели, уходит на дугу $\omega t R_2$, и атом попадает на место, отстоящее от первой полосы на эту дугу:

$$S = \omega R_2 t \;\Rightarrow\; t = \frac{S}{\omega R_2} = \frac{0{,}08}{2000 \cdot 0{,}2} = 2 \cdot 10^{-4}\ \text{с} = 0{,}2\ \text{мс}.$$



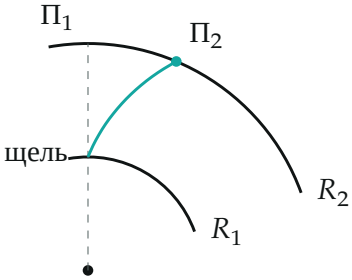
В лабораторной системе атом летит по радиусу; за время пролёта цилиндры поворачиваются против часовой стрелки на угол $\varphi = \omega t$, и атом оседает в точке полосы $П_2$, отстающей от $П_1$ на дугу $S = \omega R_2 t$. (Угол $\varphi \approx 23°$ вычислен по данным.)

Пункт 2.

3. Скорость. Промежуток между цилиндрами $R_2 - R_1$ атом проходит равномерно:

$$v = \frac{R_2 - R_1}{t} = \frac{(R_2 - R_1)\,\omega R_2}{S} = \frac{0{,}1}{2 \cdot 10^{-4}} = 500 \text{ м/с}.$$

Взгляд из системы цилиндров. В системе отсчёта, вращающейся вместе с цилиндрами, атом удаляется от оси и одновременно отстаёт по углу со скоростью ω — его след закручивается в спираль от щели к полосе $П_2$. Ниже она построена по точкам $r = R_1 + v\tau$, угол $-\omega\tau$.



Траектория атома в системе отсчёта цилиндров (по вычисленным точкам): отставание по углу накапливается равномерно, пока атом летит.

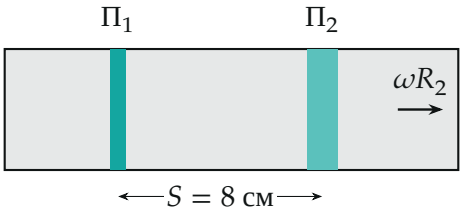
Пункт 3.

4. Температура. Средняя кинетическая энергия поступательного движения атома равна $\frac{3}{2}kT$ (основное уравнение молекулярно-кинетической теории). Считаем, как и организаторы, что найденная скорость — средняя квадратичная (в пучке разные атомы летят с разными скоростями, полоса размыта; S — смещение её середины):

$$\frac{m_0v^2}{2} = \frac{3}{2}kT \;\Rightarrow\; T = \frac{m_0v^2}{3k} = \frac{Mv^2}{3R},$$

так как $m_0/k = (M/N_\text{A})/(R/N_\text{A}) = M/R$. Числа:

$$T = \frac{0{,}1 \cdot 500^2}{3 \cdot 8{,}31} \approx 1{,}0 \cdot 10^3 \text{ К}.$$



Развёртка боковой поверхности внешнего цилиндра: полоса $П_1$ — без вращения, полоса $П_2$ (шире: атомы летят с разными скоростями) — при вращении; поверхность движется со скоростью ωR_2.

Обратите внимание. S отсчитывается по дуге внешнего цилиндра, поэтому в формулу входит R_2, а не R_1: угол поворота $\varphi = S/R_2 = 0{,}4$ рад. Время пролёта от нити до щели в расчёт не входит — щель лишь выделяет пучок.

Ответ (матрёшкой). $t = \dfrac{S}{\omega R_2}$, $v = \dfrac{R_2 - R_1}{t}$,

$$T = \frac{Mv^2}{3R} = \frac{M}{3R}\left(\frac{(R_2 - R_1)\omega R_2}{S}\right)^2.$$

Проверка. Размерности: $S/(\omega R_2)$ измеряется в секундах (метры делим на метры в секунду), Mv^2/R — в кельвинах (джоули на моль делим на джоули на моль-кельвин). Предел $\omega \to 0$: $S \to 0$ при той же скорости — полосы сливаются, как и без вращения. Порядок величины: 500 м/с при 1000 К для тяжёлого атома серебра правдоподобен (у азота при 300 К около 500 м/с; $v \propto \sqrt{T/M}$, и $\sqrt{(1000/100)/(300/28)} \approx 1$).

Смысл: вращение превращает измерение скорости атома в измерение длины — смещения полосы налёта.

Ответ. 1) $t = \dfrac{S}{\omega R_2} = 0{,}2$ мс; 2) $v = \dfrac{(R_2 - R_1)\omega R_2}{S} = 500$ м/с; 3) $T = \dfrac{Mv^2}{3R} \approx 1000$ К.