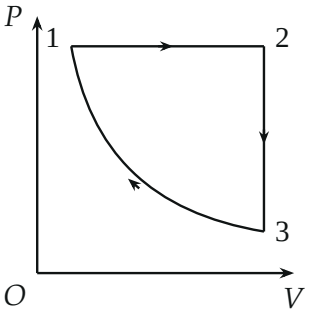
Цикл: изобара, изохора, адиабата

Задача 5. [Физтех 2017/18, 10 класс, задача 5] Одноатомный идеальный газ расширяется в изобарическом процессе 1–2, затем охлаждается в изохорическом процессе 2–3 и сжимается в адиабатическом процессе 3–1 (см. рис.). Отношение работы газа A_{12} в процессе 1–2 к работе над газом A_{31} ($A_{31} > 0$) в процессе 3–1 равно $\dfrac{A_{12}}{A_{31}} = \dfrac{56}{9}$. В процессе расширения объём газа увеличивается в 8 раз.



1. Найти отношение температур T_1/T_3 в состояниях 1 и 3.
2. Найти КПД цикла.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на первый закон термодинамики для цикла. Работа газа на изобаре 1–2 выражается через $T_2 - T_1$, а T_2/T_1 задано расширением в 8 раз. На адиабате 3–1 тепла нет, и работа над газом равна приросту внутренней энергии — она выражается через $T_1 - T_3$. Отношение работ даёт T_1/T_3. Для КПД: тепло газ получает только на изобаре 1–2, отдаёт — только на изохоре 2–3.

Обозначения. ν — количество вещества; $C_V = \frac{3}{2}R$ и $C_P = \frac{5}{2}R$ — молярные теплоёмкости одноатомного газа; p_1 — давление на изобаре; V_1 — объём в состоянии 1, $V_2 = V_3 = 8V_1$; Q_{ij} — теплота, полученная газом в процессе i–j.

Пункт 1.

1. Изобара 1–2. Давление постоянно; по уравнению Менделеева–Клапейрона $pV = \nu RT$ температура пропорциональна объёму:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{V_2}{V_1} = 8 \;\Rightarrow\; T_2 = 8T_1.$$

Работа газа при постоянном давлении:

$$A_{12} = p_1(V_2 - V_1) = \nu R(T_2 - T_1) = 7\nu RT_1.$$

2. Адиабата 3–1. Первый закон термодинамики $Q = \Delta U + A_{\text{газа}}$ при $Q_{31} = 0$; работа газа равна $-A_{31}$:

$$0 = \nu C_V(T_1 - T_3) - A_{31} \;\Rightarrow\; A_{31} = \frac{3}{2}\nu R(T_1 - T_3).$$

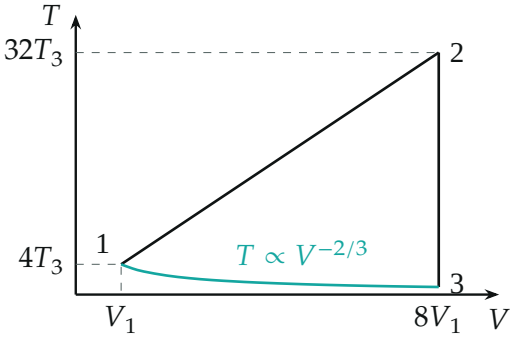
Газ сжимают без теплообмена — вся работа внешних сил идёт в его внутреннюю энергию, поэтому $T_1 > T_3$.

3. Отношение работ.

$$\frac{A_{12}}{A_{31}} = \frac{7T_1}{\frac{3}{2}(T_1 - T_3)} = \frac{56}{9} \;\Rightarrow\; T_1 - T_3 = \frac{9 \cdot 7}{56 \cdot \frac{3}{2}} T_1 = \frac{3}{4}T_1,$$

$$T_3 = \frac{1}{4}T_1, \qquad \frac{T_1}{T_3} = 4.$$

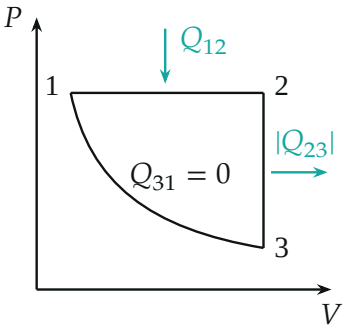
Второй способ (уравнение адиабаты). Для одноатомного газа $\gamma = 5/3$ и $TV^{\gamma-1} = TV^{2/3} = \text{const}$. На адиабате $V_3 = 8V_1$: $T_1/T_3 = (V_3/V_1)^{2/3} = 8^{2/3} = 4$. Данные условия согласованы.



Цикл в осях T–V по вычисленным точкам: изобара 1–2 ($T \propto V$), изохора 2–3, адиабата 3–1 (бирюзовая). Температура в точке 3 равна T_3 — нижний конец изохоры.

Пункт 2.

4. Где газ получает и где отдаёт тепло. Изобара 1–2: газ расширяется и нагревается — $Q_{12} = \nu C_P(T_2 - T_1) > 0$. Изохора 2–3: работы нет, температура падает — $Q_{23} = \nu C_V(T_3 - T_2) < 0$, газ отдаёт тепло. Адиабата 3–1: $Q_{31} = 0$.



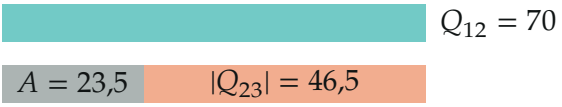
Тепло газ получает только на изобаре 1–2 и отдаёт только на изохоре 2–3.

5. КПД. За цикл $\Delta U = 0$, поэтому работа газа за цикл $A = Q_{12} + Q_{23}$. В единицах $\nu R T_3$ ($T_1 = 4T_3$, $T_2 = 32T_3$):

$$Q_{12} = \frac{5}{2}(32 - 4) = 70, \qquad Q_{23} = \frac{3}{2}(1 - 32) = -46{,}5.$$

$$\eta = \frac{A}{Q_{12}} = 1 - \frac{|Q_{23}|}{Q_{12}} = 1 - \frac{46{,}5}{70} = \frac{47}{140} \approx 0{,}34.$$

Второй способ (через работы). Работа газа на изобаре $A_{12} = 7\nu RT_1 = 28\,\nu RT_3$, на изохоре ноль, на адиабате $-A_{31} = -\frac{3}{2}\cdot 3\,\nu RT_3 = -4{,}5\,\nu RT_3$. За цикл $A = 23{,}5\,\nu RT_3$, $\eta = 23{,}5/70 = 47/140$ — то же.



Баланс энергии за цикл в единицах νRT_3: полученное тепло Q_{12} делится на работу A и отданное тепло $|Q_{23}|$.

Обратите внимание. A_{31} — работа *над* газом, она положительна; работа самого газа на адиабате равна $-A_{31}$. С неверным знаком получилось бы $T_1 < T_3$ — газ остывал бы при адиабатическом сжатии, что невозможно.

Ответ (матрёшкой).

$$\frac{T_1}{T_3} = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}\cdot\frac{7A_{31}}{A_{12}}} = 4, \qquad \eta = 1 - \frac{C_V(T_2 - T_3)}{C_P(T_2 - T_1)} = \frac{47}{140} \approx 0{,}34.$$

Проверка. Отношения безразмерны. КПД меньше КПД цикла Карно между крайними температурами: $1 - T_3/T_2 = 31/32 \approx 0{,}97$ — верно, $0{,}34 < 0{,}97$. Результат пункта 1 подтверждён уравнением адиабаты.

Смысл: в цикле с большим расширением газ много тепла отдаёт на изохоре, поэтому КПД заметно ниже предела Карно.

Ответ. 1) $\frac{T_1}{T_3} = 4$; 2) $\eta = \frac{47}{140} \approx 0{,}34$.