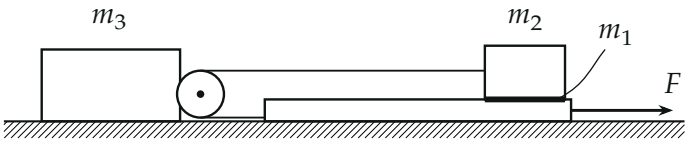
Три бруска с нитью и блоком

Задача 1. [Физтех 2017/18, 11 класс, задача 1] Систему из трёх брусков, находящихся на горизонтальном столе, приводят в движение, прикладывая горизонтальную силу F (см. рис.). Коэффициент трения между столом и брусками и между соприкасающимися брусками m_1 и m_2 равен μ. Массы брусков $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, $m_3 = 3m$. Массой горизонтально натянутой нити, массой блока и трением в его оси пренебречь.

1. Найти силу натяжения нити, если бруски m_1 и m_2 скрепить, а параметры F, m, μ подобрать такими, чтобы бруски двигались по столу как одно целое.
2. Найти силу натяжения нити, если параметры F, m, μ подобраны так, что нескреплённые бруски m_1 и m_2 движутся друг по другу, а бруски m_1 и m_3 по столу.



▲ **Решение. Что происходит.** Блок закреплён на бруске m_3, а нить перекинута через него: один её конец привязан к m_2, другой к m_1. Нить тянет блок, а вместе с ним и m_3, вправо двумя участками, то есть силой $2T$, а бруски m_2 и m_1 тянет назад, каждый силой T. В пункте 1 все три тела движутся с одним ускорением: хватает второго закона Ньютона для всей системы и для m_3. В пункте 2 ускорения разные, но нить нерастяжима и это связывает их; добавляется трение между m_1 и m_2.

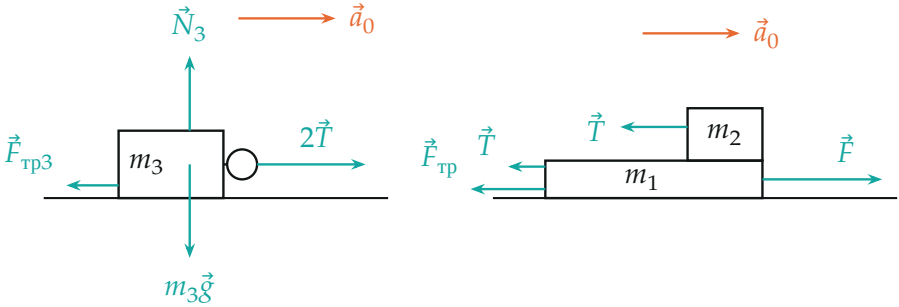
Обозначения. Ось x направлена вправо вдоль стола. T — сила натяжения нити, a_1, a_2, a_3 — проекции ускорений брусков на ось x (блок и m_3 едут вместе), N — силы реакции опоры.

Пункт 1.

1. Вся система. Нить и блок — внутренние части системы, поэтому горизонтально на неё действуют только сила F и трение стола. Бруски m_1 и m_2 скреплены, давят на стол всем весом, и трение скольжения на

все три бруска равно $\mu(m_1+m_2+m_3)g = 6\mu mg$. Второй закон Ньютона для системы из трёх брусков в проекции на ось x:

$$F - 6\mu mg = 6m\,a_0.$$



брусок m_3 с блоком скреплённые m_1 и m_2

Горизонтальные силы в пункте 1 (вертикальные для m_1, m_2 не показаны): на m_3 с блоком действует $2T$, на скреплённые бруски — F, две силы T и трение стола.

2. Брусок m_3 с блоком. Эту часть системы выбираем потому, что на неё нить действует в одной точке и сразу двумя участками: невесомый блок, не имеющий трения в оси, передаёт на ось силу $2T$. Для m_3 с блоком в проекции на ось x:

$$2T - \mu m_3 g = m_3 a_0, \qquad 2T - 3\mu mg = 3m\,a_0.$$

3. Исключаем a_0. Из первого пункта $6m\,a_0 = F - 6\mu mg$, значит $3m\,a_0 = \dfrac{F}{2} - 3\mu mg$. Подставляем:

$$2T - 3\mu mg = \frac{F}{2} - 3\mu mg \quad \Rightarrow \quad T_0 = \frac{F}{4}.$$

Тот же результат получается без общего уравнения. Для скреплённых m_1, m_2 (масса $3m$) сила нити действует дважды: $F - 2T - 3\mu mg = 3m\,a_0$. Вычитая из него уравнение для m_3, находим $F - 4T = 0$. Смысл: у обеих

частей системы одинаковые масса $3m$ и трение $3\mu mg$, поэтому они делят силу F пополам, и силе $F/2$ у m_3 соответствует $2T$.

Пункт 2.

4. Связь ускорений. Длина нити постоянна: она складывается из участка от блока до m_2, участка от блока до левого конца m_1 и полуокружности на блоке. Пусть x_b, x_1, x_2 — координаты блока, левого конца m_1 и бруска m_2. Тогда $(x_2 - x_b) + (x_1 - x_b) = \text{const}$ (участки нити постоянной длины уходят в константу). За малое время dt

$$dx_1 + dx_2 = 2\,dx_b, \qquad \text{то есть} \qquad a_1 + a_2 = 2a_3.$$

Обозначим $a_1 = a_3 + a$, $a_2 = a_3 - a$. Нить тянет m_2 влево, поэтому m_2 скользит по m_1 влево, и $a > 0$.

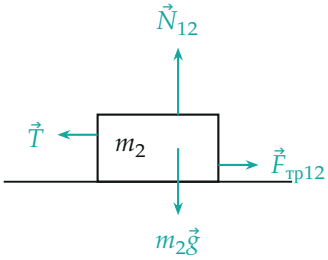
блок $\longrightarrow dx_b$

конец m_1 $\longrightarrow dx_1 = dx_b + dx$

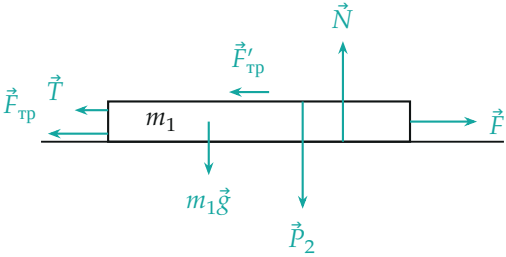
m_2 $\longrightarrow dx_2 = dx_b - dx$

Смещения за малое время: концы нити отходят от блока в противоположные стороны на dx, поэтому смещения m_1 и m_2 отличаются от смещения блока на $+dx$ и $-dx$.

5. Силы трения. Запишем их, учитывая, кто на кого давит. Бруски скользят, поэтому каждое трение — скольжения. На стол давят m_1 и m_2, значит $N = (m_1 + m_2)g = 3mg$ и трение стола на m_1 равно $3\mu mg$ (влево). Брусок m_2 скользит влево по m_1, и трение на него со стороны m_1 направлено вправо: $\mu m_2 g = 2\mu mg$; на m_1 со стороны m_2 действует такая же по модулю сила влево (третий закон Ньютона). На m_3 трение равно $3\mu mg$.



брусок m_2



брусок m_1

Силы на m_2 и m_1 (бирюзовые). $\vec{P}_2$ — давление m_2 на m_1, $\vec{F}'_{тр}$ — трение на m_1 со стороны m_2, $\vec{F}_{тр}$ — трение стола. Длины стрелок примерно по модулю.

6. Второй закон Ньютона для каждого бруска (горизонтальные проекции):

$$\begin{aligned} m_1: &\quad F - T - 3\mu mg - 2\mu mg = m(a_3 + a), \\ m_2: &\quad -T + 2\mu mg = 2m(a_3 - a), \\ m_3 \text{ с блоком}: &\quad 2T - 3\mu mg = 3m\,a_3. \end{aligned}$$

Неизвестных три: T, a, a_3; нужна только T. Разделим первое уравнение на m, второе на $2m$ и сложим: a уходит.

$$\frac{F - T - 5\mu mg}{m} + \frac{2\mu mg - T}{2m} = 2a_3 \quad \Rightarrow \quad 2F - 3T - 8\mu mg = 4m\,a_3.$$

Из третьего уравнения $4m\,a_3 = \dfrac{8T - 12\mu mg}{3}$. Подставляем и сокращаем:

$$6F - 9T - 24\mu mg = 8T - 12\mu mg \quad \Rightarrow \quad 17\,T = 6F - 12\mu mg.$$

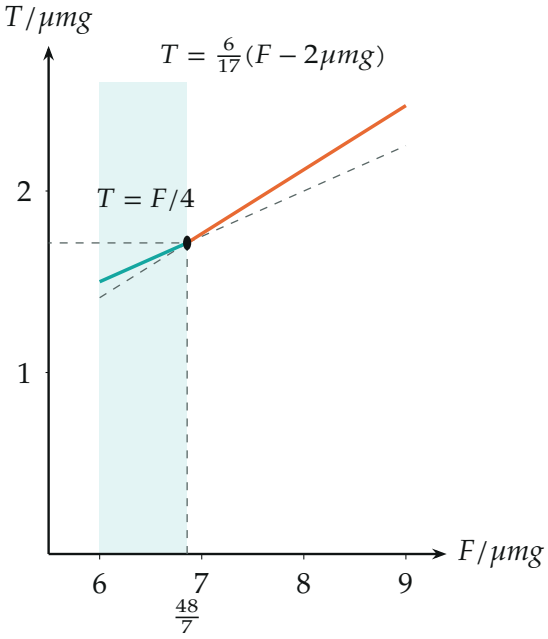
$$T = \frac{6}{17}\,(F - 2\mu mg)\,.$$

7. Когда применим каждый случай. Вычтем из первого уравнения (делённого на m) второе (делённое на $2m$): получим $4m\,a = 2F - T -$

$12\mu mg$, откуда

$$a = \frac{7F - 48\mu mg}{17\,m}.$$

Условие $a > 0$, то есть скольжение m_2 по m_1, выполнено при $F > \frac{48}{7}\mu mg$. Ускорения $a_3 = \frac{4F - 25\mu mg}{17m}$ и $a_1 = \frac{11F - 73\mu mg}{17m}$ положительны уже при меньших F, то есть другие условия лишние. В пункте 1 бруски скреплены, и формула $T_0 = F/4$ верна при любой $F > 6\mu mg$. Но если бы их не скрепили, вместе они ехали бы, только пока хватает трения покоя между ними: для m_2 получаем $f = T_0 + 2ma_0 = \frac{7F}{12} - 2\mu mg$, и требование $f \le \mu m_2 g = 2\mu mg$ даёт $F \le \frac{48}{7}\mu mg$. Ответы пунктов 1 и 2 сшиваются на границе: при $F = \frac{48}{7}\mu mg$ обе формулы дают $T = \frac{12}{7}\mu mg$.



Сила натяжения нити. Бирюзовая часть — пункт 1, оранжевая — пункт 2; пунктиром продолжения обеих формул за пределы их применимости.

Обратите внимание. Блок стоит на m_3, а не на неподвижной оси: нить действует на него двумя участками, и m_3 тянет вправо сила $2T$, а не T. Давление на стол у m_1 создаёт и m_2, поэтому трение стола — $3\mu mg$, а не μmg; у m_1 есть ещё второе трение — со стороны скользящего m_2. Ускорения брусков в пункте 2 не равны: $a_1 \neq a_2$, связь даёт лишь $a_1 + a_2 = 2a_3$.

Проверка. Размерность: T и F — силы, μmg — тоже сила. Сшивка на границе $F = \frac{48}{7}\mu mg$ — вторая независимая проверка: два разных уравнения дают одно $T = \frac{12}{7}\mu mg$ (так и должно быть: при $a = 0$ скольжение m_2 по m_1 только начинается). Подстановка $F = 7\mu mg$ в линейную систему шага 6 даёт $T = \frac{30}{17}\mu mg$, $a = \frac{1}{17}g$ и $a_3 = \frac{3}{17}g$, и все три уравнения выполняются. Смысл: в пункте 1 нить передаёт четверть силы F независимо от трения, а в пункте 2 часть силы теряется на трение скольжения между m_1 и m_2, и натяжение растёт с F быстрее (наклон $\frac{6}{17}$ вместо $\frac{1}{4}$).

Ответ. 1) $T_0 = \dfrac{F}{4}$; 2) $T = \dfrac{6}{17}\,(F - 2\mu mg)$.