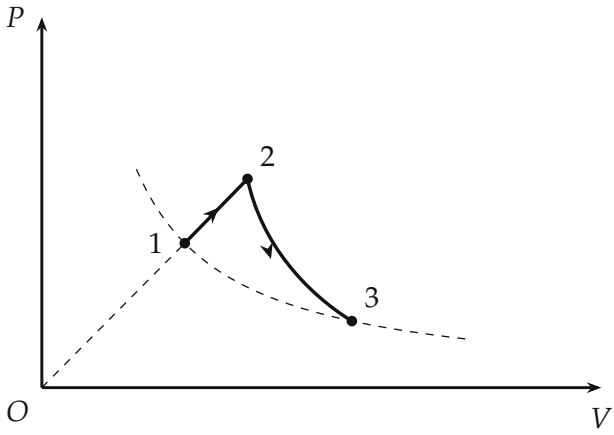
Гелий: процесс $p \propto V$ и процесс с постоянной теплоёмкостью

Задача 2. [Физтех 2017/18, 11 класс, задача 2] Газообразный гелий расширяется в процессе 1–2, в котором давление прямо пропорционально объёму (см. рис.). Затем газ расширяется в процессе 2–3 с постоянной теплоёмкостью. Работа, совершённая газом в процессе 1–2, в 6 раз меньше работы, совершённой газом в процессе 2–3. Температуры в состояниях 1 и 3 равны.

1. Найти отношение количества теплоты, полученной газом в процессе 1–2, к работе газа в процессе 1–2.
2. Найти молярную теплоёмкость газа в процессе 2–3.



▲ **Решение. О рисунке условия.** Рисунок повторяет схему организаторов, он не в масштабе. Дальше в решении выйдет $C = -\frac{3}{2}R$, то есть участок 2–3 — политропа $pV^{4/3} = \text{const}$, и при $T_3 = T_1$ получается $V_3 = (V_2/V_1)^7\, V_1$: точка 3 лежит намного правее, чем на схеме (при $V_2 = 1{,}25\, V_1$ уже $V_3 \approx 4{,}8\, V_1$). Рисунки решения ниже построены в верном масштабе по расчёту.

Что происходит. Гелий одноатомный, поэтому его внутренняя энергия $U = \frac{3}{2}\nu RT$. Для каждого участка работает первое начало термо-

динамики $Q = \Delta U + A$. На участке 1–2 процесс идёт по прямой, проходящей через начало координат: работа — площадь трапеции, и вместе с уравнением Менделеева — Клапейрона она выражается через изменение температуры. На участке 2–3 теплоёмкость постоянна, значит $Q_{23} = \nu C\,\Delta T_{23}$. Участки связаны равенством $T_3 = T_1$: газ вернулся к исходной температуре, поэтому $\Delta U_{23} = -\Delta U_{12}$. Класс задачи — процесс с заданной теплоёмкостью.

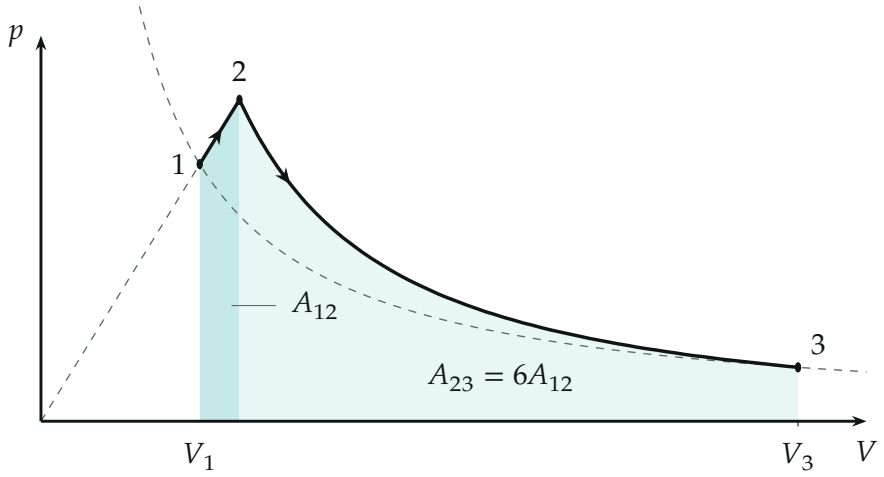
Обозначения. ν — число молей, A_{12}, A_{23} — работы газа, Q_{12}, Q_{23} — полученные газом количества теплоты, $\Delta T_{12} = T_2 - T_1$. Короткая запись $A \equiv A_{12}$, тогда по условию $A_{23} = 6A$.

Пункт 1.

1. Работа на участке 1–2. Она равна площади трапеции под отрезком 1–2: $A = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_2 - V_1)$. Давление пропорционально объёму ($p = \alpha V$), поэтому $p_1 V_2 = \alpha V_1 V_2 = p_2 V_1$, и раскрытие скобок даёт

$$A = \frac{1}{2}\,(p_1 V_2 - p_1 V_1 + p_2 V_2 - p_2 V_1) = \frac{1}{2}\,(p_2 V_2 - p_1 V_1) = \frac{1}{2}\,\nu R\,\Delta T_{12}.$$

Последнее равенство — уравнение Менделеева — Клапейрона $pV = \nu RT$ в состояниях 1 и 2. Так как $A > 0$, температура на участке 1–2 растёт.



Работы газа — площади под графиком: узкая трапеция A_{12} и широкая об-

ласть A_{23}. Рисунок построен по расчёту для $V_2 = 1{,}25\,V_1$ (дальше в решении видно, что $p_3V_3 = p_1V_1$ и $V_3 = 1{,}25^7 V_1 \approx 4{,}8V_1$).

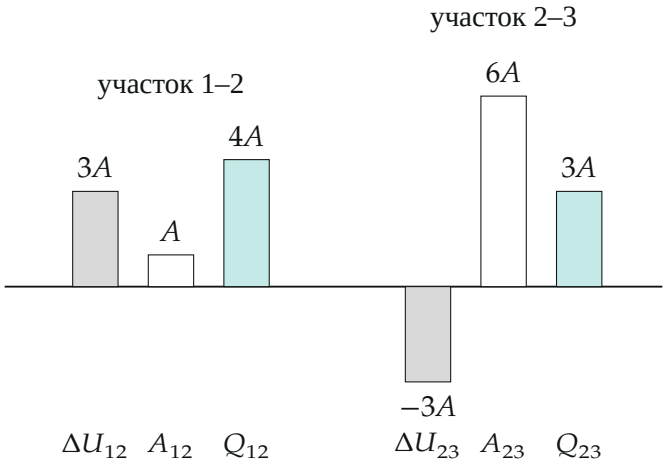
2. Внутренняя энергия на участке 1–2. Для одноатомного газа $\Delta U_{12} = \frac{3}{2}\nu R\,\Delta T_{12}$. По шагу 1 $\nu R\,\Delta T_{12} = 2A$, поэтому $\Delta U_{12} = 3A$.

3. Первое начало термодинамики для участка 1–2:

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + A = 3A + A = 4A, \qquad \frac{Q_{12}}{A_{12}} = 4.$$

Газ получает теплоту: на работу идёт четверть, остальное — на нагрев.

Второй способ, через малый шаг. Из $pV = \alpha V^2$ следует $d(pV) = 2\alpha V\,dV = 2p\,dV$, то есть $p\,dV = \frac{1}{2}\nu R\,dT$. Теплота малого шага $dQ = \frac{3}{2}\nu R\,dT + p\,dV = 2\nu R\,dT$ (у этого процесса $C = 2R$), а работа $\frac{1}{2}\nu R\,dT$; их отношение — те же 4 при любом V_2/V_1.



Баланс энергии газа в единицах $A = A_{12}$: на участке 1–2 теплота $4A$ идёт на нагрев ($3A$) и работу (A); на участке 2–3 газ получает $3A$, отдаёт работой $6A$, и недостающие $3A$ берутся из внутренней энергии.

Пункт 2.

4. Качественная картина. На участке 2–3 газ расширяется и совершает работу $6A > 0$, а его температура падает от T_2 до $T_3 = T_1 < T_2$. Теплота может быть любого знака: нужно считать.

5. Внутренняя энергия на участке 2–3. Так как $T_3 = T_1$, изменение температуры на 2–3 — то же по модулю, что на 1–2, но с обратным знаком: $\Delta T_{23} = -\Delta T_{12}$. Тогда

$$\Delta U_{23} = \tfrac{3}{2}\nu R\,\Delta T_{23} = -\Delta U_{12} = -3A.$$

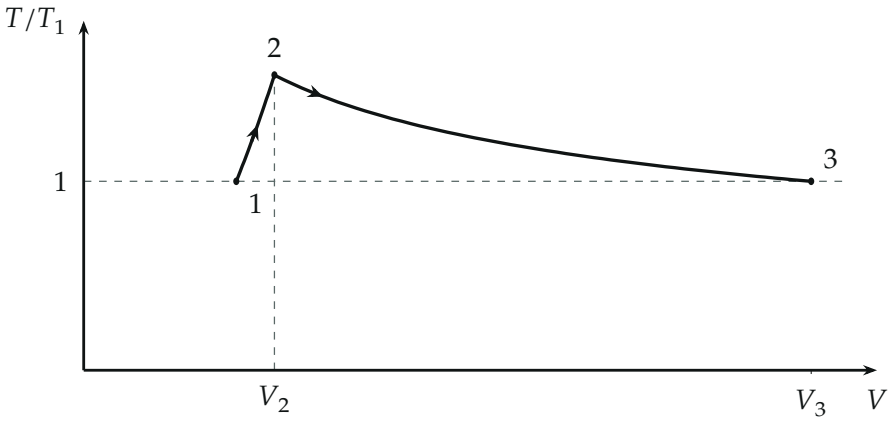
6. Первое начало термодинамики для участка 2–3:

$$Q_{23} = \Delta U_{23} + A_{23} = -3A + 6A = 3A > 0.$$

Газ в действительности получает теплоту, хотя температура падает.

7. Теплоёмкость. Для процесса с постоянной молярной теплоёмкостью C имеем $Q_{23} = \nu C\,\Delta T_{23} = -\nu C\,\Delta T_{12}$. Из шага 1 $\nu\Delta T_{12} = \dfrac{2A}{R}$, поэтому

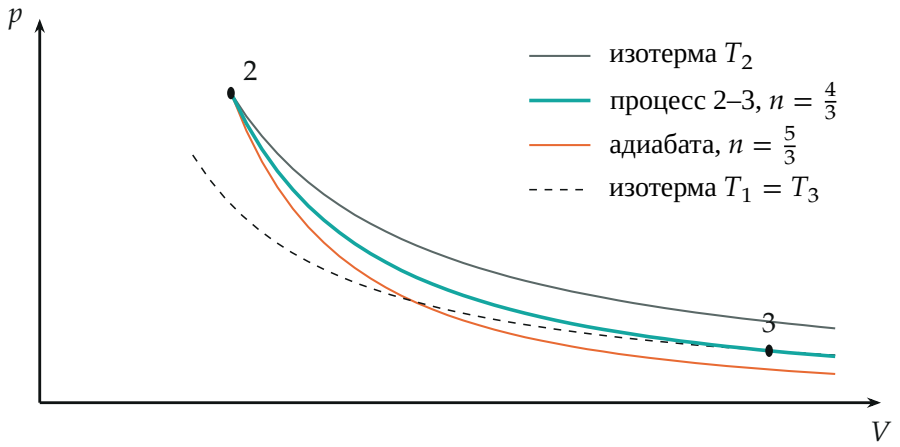
$$3A = -C\cdot\frac{2A}{R} \quad\Rightarrow\quad C = -\frac{3}{2}R.$$



Температура вдоль процесса $1 \to 2 \to 3$: сначала растёт ($T \propto V^2$), потом падает ($T \propto V^{-1/3}$) и возвращается к T_1.

Второй способ. Процесс с постоянной теплоёмкостью — политропа $pV^n = \text{const}$. Для неё $d(pV) = p\,dV + V\,dp = (1-n)\,p\,dV$ (так как $V\,dp = -n\,p\,dV$), поэтому $p\,dV = \dfrac{\nu R\,dT}{1-n}$ и $C = C_V + \dfrac{R}{1-n}$, где

$C_V = \frac{3}{2}R$. Значение $C = -\frac{3}{2}R$ даёт $\dfrac{R}{1-n} = -3R$, то есть $n = \frac{4}{3}$. Работа политропы $A_{23} = \dfrac{p_2V_2 - p_3V_3}{n-1} = 3\,(p_2V_2 - p_1V_1) = 6A$, так как $p_3V_3 = p_1V_1$. Это согласуется с условием: при $n = 4/3$ и $T_3 = T_1$ отношение работ $A_{23}/A_{12} = 6$ получается при любом V_2/V_1. Линия 2–3 идёт круче изотермы ($n = 1$), но положе адиабаты ($n = 5/3$): на таком участке газ получает теплоту, остывая.



Из точки 2 расходятся изотерма, процесс 2–3 и адиабата. Линия 2–3 лежит между изотермой и адиабатой и приходит на изотерму T_1 в точке 3: по пути газ расширяется, остывает и при этом получает теплоту.

Обратите внимание. Отрицательная теплоёмкость — не ошибка: она означает, что на участке 2–3 при получении теплоты температура не растёт, а падает, потому что газ отдаёт в работу больше, чем получает. Работа на 1–2 — площадь трапеции, а не $p\,\Delta V$ с одним давлением.

Проверка. Размерность: Q/A безразмерно, C измеряется в единицах R. Численно для $V_2 = 1{,}25V_1$ при $p_1V_1 = 1$: $A_{12} = 0{,}281$, $\Delta U_{12} = 0{,}844 = 3A_{12}$, $V_3 = 1{,}25^7V_1$, $A_{23} = 1{,}687 = 6A_{12}$ (интеграл по политропе), $\Delta U_{23} = -0{,}844$, $Q_{23} = 0{,}844$, и $C = Q_{23}/(\nu\Delta T_{23}) = -1{,}5R$. Смысл: на участке 1–2 четыре доли теплоты — три на нагрев и одна на работу, а на участке 2–3 газ расширяется «в долг» у собственной внутренней энергии.

Ответ. 1) $\dfrac{Q_{12}}{A_{12}} = 4$; 2) $C = -\dfrac{3}{2}R$.